Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

Investigação Operacional no Ensino Secundário

Um manual para o professor

Carla Sofia Falcão Gonçalves

Dissertação

Mestrado em Matemática para Professores

2014

Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

Investigação Operacional no Ensino Secundário

Um manual para o professor

Carla Sofia Falcão Gonçalves

Dissertação orientada pela

Professora Doutora Maria Eugénia Vasconcelos Captivo

Mestrado em Matemática para Professores

2014

Resumo

Neste trabalho apresenta-se uma proposta de estudo da Investigação Operacional no Ensino Secundário, nomeadamente dos temas da Programação Linear e Modelos de Grafos, integrados nos programas das disciplinas de Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

Foi elaborado tendo como referência as orientações metodológicas propostas pelo Ministério da Educação e pretende ser um recurso útil para os professores de Matemática no estudo e preparação das aulas relativas a estes dois conteúdos.

Assim, no desenvolvimento de cada tema é feita uma breve síntese histórica e, a par de uma abordagem teórica, expõem-se, comentam-se e resolvem-se alguns problemas selecionados a pensar em alunos deste nível de ensino. Para cada um dos temas apresenta-se ainda um conjunto de problemas propostos e respetivas soluções que permitam a consolidação dos conteúdos abordados.

Palavras chave: Investigação Operacional, Programação Linear, Modelos de Grafos, Problemas.

Abstract

This work presents a study proposal of Operational Research in Secondary Education, namely the themes of Linear Programming and Graph Models, integrated into the programs of the following subjects: Mathematics A, Mathematics B and Applied Mathematics to Social Sciences.

It was written according to methodological guidelines proposed by the Ministry of Education and intends to be a useful source for all the teachers of Maths in the study and preparation of lessons related to these two topics.

Thus, each topic develops a brief historical overview and a theoretical approach as well, showing, commenting and solving some selected problems taking into consideration higher education students. For each subject is still presented a set of proposed problems and their solutions in order to consolidate the topics studied.

Keywords: Operational Research, Linear Programming, Graph Models, Problems.

Agradecimentos

À professora Maria Eugénia Captivo que me orientou neste trabalho, pelo apoio e orientação e pela disponibilidade que sempre manifestou durante todo este percurso.

À minha amiga Rute, que tive o prazer de conhecer quando iniciei este mestrado, pelas preciosas dicas e ajuda que deu na fase final deste trabalho.

Aos meus colegas do mestrado em Matemática para Professores, Maria José, Ilca e Tito com quem partilhei esta experiência ao longo destes dois anos, pelas interações estabelecidas e pelos momentos de boa disposição nas aulas. Apesar de não ter sido fácil conciliar o trabalho com o mestrado conseguimos chegar ao fim.

Aos meus pais e irmã por estarem sempre ao meu lado, pelo afeto e compreensão e por me terem incentivado a ingressar no mestrado. Obrigado por acreditarem em mim.

À pequena Diana pela alegria contagiante, pelo sorriso e pela força que transmitiu e me fez conseguir chegar ao fim deste caminho. A ela dedico este trabalho!

Índice

Índice de figuras

Índice de tabelas

Capítulo I

Introdução

A frequência da disciplina de Probabilidades e Estatística, no decorrer do mestrado em Matemática para Professores, despertou o meu interesse para incluir no trabalho final os conhecimentos adquiridos na área da Investigação Operacional, em particular os temas *Programação Linear* e *Otimização em Redes*.

Por outro lado, quis que este trabalho estivesse diretamente ligado à minha prática pedagógica, pelo que decidi apresentar uma proposta de estudo no âmbito da Investigação Operacional no Ensino Secundário.

Pela análise dos programas oficiais do Ministério da Educação pude verificar que o estudo da *Programação Linear* é feito no 11.º ano, na disciplina de Matemática A e no 12.º ano, na disciplina de Matemática B; o estudo da *Otimização em Redes* é feito no 11.º ano, na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), com a designação de *Modelos de Grafos*.

Ao pesquisar sobre estes temas e sua abordagem ao nível do Ensino Secundário pude constatar a existência, no meu ponto de vista, de algumas lacunas na proposta do Ministério da Educação, em especial no estudo dos *Modelos de Grafos* relativamente aos objetivos específicos e indicações metodológicas que me parecem pouco cuidados e merecedores de um maior desenvolvimento. Estes aspetos são percetíveis na forma como os manuais apresentam o tema pois, de forma geral, existem discrepâncias nos conteúdos abordados sobretudo na terminologia e notação utilizadas.

Considero a *Programação Linear* um conteúdo apelativo que permite aos alunos compreender a Matemática como uma forma de interpretar a realidade. Nos problemas desta temática surgem situações do quotidiano que podem conduzir a um maior interesse, por parte dos alunos, pelo estudo e contribuir para o sucesso na aprendizagem. Julgo que a utilização da tecnologia em sala de aula é um meio muito interessante na abordagem e resolução deste tipo de problemas e que me parece pouco explorado.

Decidi então criar material de apoio para o ensino da Matemática na abordagem e desenvolvimento destes dois temas. O meu principal objetivo é criar recursos para os professores no estudo e preparação das aulas relativas a estes temas.

Investigação Operacional no Ensino Secundário

"*A Investigação Operacional é uma ciência aplicada voltada para a resolução de problemas reais, em que se procura trazer para o campo da tomada de decisões (sobre a conceção, o planeamento ou a operação de sistemas) a atitude e os métodos próprios de outras áreas científicas. Através de desenvolvimentos de base quantitativa, a Investigação Operacional visa também introduzir elementos de objetividade e racionalidade nos processos de tomada de decisão, sem descurar no entanto os elementos subjetivos e de enquadramento organizacional que caracterizam os problemas*."…"*Face ao seu caráter multidisciplinar, a Investigação Operacional é uma disciplina científica de características horizontais, estendendo-se os seus contributos por praticamente todos os domínios da atividade humana, desde a engenharia à medicina, passando pela economia e a gestão*." (Associação Portuguesa de Investigação Operacional)

A Investigação Operacional conta com um vasto conjunto de técnicas e modelos de natureza matemática nos quais se apoia para resolver os aspetos matemáticos dos problemas de que se ocupa.

No Ensino Secundário a abordagem a problemas do domínio da Investigação Operacional é feita no estudo da *Programação Linear*, nas disciplinas de Matemática A e Matemática B e no estudo dos *Modelos de Grafos* na disciplina de MACS.

Programação linear

"*A Programação Matemática e, em especial a Programação Linear constitui um dos ramos mais desenvolvidos da Investigação Operacional. O seu objeto de estudo é a atividade humana dirigida em que se pretende satisfazer da melhor forma determinado objetivo, sendo que existem limitações (restrições) ao funcionamento dessa atividade*." (Ramalhete, Guerreiro, & Magalhães, 1984)

Desde o ano letivo 2004/2005 que o estudo da *Programação Linear* passou a ser um dos temas obrigatórios nos programas das disciplinas de Matemática A do 11.º ano e Matemática B do 12.º ano.

Para a disciplina de Matemática A a abordagem proposta pelo Ministério da Educação na Brochura de Geometria do Ensino Secundário do 11.º ano é *"(...) uma abordagem geométrica*" para a resolução deste tipo de problemas, na qual "*O objetivo primordial deste assunto é motivar os alunos para a aprendizagem da Matemática, mostrando-lhes verdadeiros problemas reais nos quais a Geometria que estão a aprender é atualmente usada na indústria, na economia, etc…*" (Ministério da Educação, 1998)

Pode ler-se no Programa de Matemática A que "*A Programação Linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos aprendidos no 10.º e ampliados no 11.º.*" (Ministério da Educação, 2002)

No programa de Matemática B, para o 12.º ano, sugere-se a proposta aos alunos de "*situações realistas simples com constrangimentos de produção ou outros que podem ser modelados por inequações lineares*". O objetivo principal é familiarizar os alunos com situações de gestão, para que desenvolvam competências para tomar boas decisões em termos de planeamento. Os alunos deverão ser capazes de "*reconhecer que diferentes situações podem ser descritas pelo mesmo modelo matemático; resolver numérica e graficamente problemas simples de programação linear; reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações*." (Ministério da Educação, 2002)

Modelos de Grafos

A Teoria dos Grafos é uma ferramenta matemática muito utilizada na modelação de situações reais e como tal uma técnica na construção de modelos para problemas de Investigação Operacional.

Em 2001, na última reformulação dos programas de Matemática do Ensino Secundário, os *Modelos de Grafos* aparecem pela primeira vez, neste nível de ensino, com a criação da disciplina de MACS.

As orientações metodológicas do Ministério da Educação para a abordagem deste tema referem explicitamente a modelação de situações reais que permitam aos alunos desenvolver *"...competências úteis para a intervenção cívica..."* e ao mesmo tempo desenvolver "…*competências fundamentais ao nível da comunicação envolvendo matemática.*" (Ministério da Educação, 2001)

Segundo as indicações do Ministério da Educação não se pretende uma introdução teórica sistematizada da Teoria dos Grafos. Os conceitos e notações de grafos devem ser introduzidos e desenvolvidos, através da resolução de problemas.

O programa da disciplina de MACS sugere que o ensino dos *Modelos de Grafos* se deve apoiar basicamente na apresentação de dois tipos de problemas: " *Sistema de distribuição- postal, de limpeza de ruas e recolha de lixo, de patrulhamento e controle de equipamentos sociais*" e "*Planos de viagens, Problemas de caixeiros viajantes, localização* *de sedes ou grandes equipamentos que carecem de abastecimento a partir de vários pontos de uma região.*"

Os alunos devem ser capazes de: "*desenvolver competências para determinar o essencial de uma determinada situação de modo a desenhar esquemas apropriados a uma boa descrição; procurar modelos e esquemas que descrevem situações realistas de pequenas distribuições; tomar conhecimento de métodos matemáticos próprios para encontrar soluções de problemas de gestão; encontrar estratégias passo a passo para encontrar possíveis soluções; descobrir resultados gerais na abordagem de uma situação.*"

Com a segunda tipologia de problemas a apresentar os alunos devem ainda ser capazes de: "*para cada modelo, procurar esquemas combinatórios (árvores) que permitam calcular pesos totais de caminhos possíveis; encontrar algoritmos- decisões passo a passo para encontrar soluções satisfatórias; discutir sobre a utilidade e viabilidade económica (e não só) da procura de soluções ótimas*." (Ministério da Educação, 2002)

Estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em três capítulos.

No primeiro capítulo, *Introdução*, do qual este ponto é parte integrante, apresenta-se a motivação para a escolha do tema e a finalidade do trabalho. Faz-se, ainda, a inserção do tema nos programas de Matemática do Ensino Secundário e referem-se as propostas do Ministério da Educação para o ensino da *Programação Linear*, dos *Modelos de Grafos* e, por último, descreve-se a forma como se estruturou este trabalho.

No segundo capítulo, aborda-se o ensino da *Programação Linear*. Este capítulo divide-se em seis secções. Na secção 2.1 apresenta-se a contextualização histórica da Programação Linear. Na secção 2.2 encontra-se a definição de um problema de Programação Linear e a estrutura geral do modelo matemático deste tipo de problemas. Na secção 2.3 apresentam-se quatro problemas de programação linear e é descrito, para cada um deles, todo o processo de resolução. Neste capítulo salientam-se, ainda, as potencialidades do uso de tecnologias de uso obrigatório nos programas do Ensino Secundário e que funcionam como elementos facilitadores de uma participação ativa do estudante na sua aprendizagem. Assim, na seção 2.4 são apresentadas duas propostas de resolução de um problema de Programação Linear com recurso à calculadora gráfica e ao computador. Finalmente, nas secções 2.5 e 2.6 encontra-se um conjunto de problemas propostos e respetivas soluções, com vista a consolidar os conteúdos abordados neste capítulo.

O terceiro capítulo deste trabalho refere-se ao tema *Modelos de Grafos* e encontra-se dividido em oito secções. Na secção 3.1 faz-se uma apresentação sucinta da história da Teoria dos Grafos e na secção 3.2 apresentam-se algumas noções gerais sobre essa mesma teoria. Nas secções 3.3 e 3.4 são estudadas duas classes particulares de Grafos: Grafos Eulerianos e Grafos Hamiltonianos apresentando dois problemas que ilustram a aplicação destes dois conceitos com destaque para o Problema do Caixeiro Viajante. A secção 3.5 refere-se ao estudo das Árvores, uma classe de grafos conexos imprescindível pelas aplicações em problemas de otimização. Dentro desta secção, destaca-se o problema de encontrar a árvore abrangente de peso mínimo e apresentam-se dois algoritmos para a sua resolução, o Algoritmo de Kruskal e o Algoritmo de Prim. A secção 3.6 é dedicada à exploração de problemas que envolvem a noção de Grafo Orientado, o Problema do Caminho Mais Curto e o Planeamento de Projetos. Por último, nas seções 3.7 e 3.8 apresenta-se um conjunto de problemas propostos e respetivas soluções.

Espero contribuir, com este "Manual para o professor", para a abordagem e desenvolvimento dos temas suprarreferidos e, assim, contribuir para a superação das lacunas existentes na proposta do Ministério da Educação, em especial no estudo dos *Modelos de Grafos* relativamente aos objetivos específicos e indicações metodológicas, bem como minorar as discrepâncias nos conteúdos abordados sobretudo na terminologia e notação utilizadas.

Capítulo II

Programação Linear

2.1 Breve síntese histórica

A Programação Linear é um método que se pode aplicar em diversas áreas, como a saúde, economia, indústria e outras, com o objetivo de otimizar o uso de recursos limitados e encontrar a solução ótima.

O estudo da Programação Linear desenvolveu-se, em finais dos anos 40, nos Estados Unidos da América, com a necessidade de resolução de problemas de otimização formulados a partir de questões logísticas da Força Aérea. Até então, os problemas logísticos eram resolvidos por tentativa e erro. Em 1947, George Dantzig, enquanto consultor matemático da Força Aérea Americana, apresentou uma forma sistematizada de resolução de problemas de Programação Linear, o Algoritmo Simplex. Este algoritmo veio permitir determinar com mais facilidade e rapidez a solução de um problema principalmente em casos que envolvem várias variáveis.

Os problemas de gestão organizacional começaram a ser resolvidos com grande eficiência pela Programação Linear, o que levou a que as grandes organizações começassem a dar importância ao trabalho dos matemáticos.

Os principais desenvolvimentos teóricos da Programação Linear devem-se a Kantorovich que desenvolveu, em 1939, um algoritmo rudimentar para resolver alguns problemas particulares de Programação Linear e cujas descobertas só mais tarde vieram a ser tornadas públicas, e a um grupo de cientistas americanos que lançaram as bases da Programação Linear entre 1939 e 1951, no qual se devem destacar os nomes de Von Neumann, Harold W. Kuhn, A. W. Tucker, George B. Dantzig, T. C. Koopmans, E. Charnes e W. W. Cooper.

Kantorovich foi galardoado em outubro de 1975, juntamente com T. C. Koopmans, com o prémio Nobel da Economia, pelas suas contribuições na teoria da otimização da distribuição e rentabilização de recursos. O trabalho de Dantzig não foi consagrado por ser considerado demasiado matemático.

Os progressos no domínio da informática constituíram fatores decisivos para a evolução acelerada da Programação Linear durante o século XX, permitindo a resolução de problemas cada vez mais elaborados tendo já poupado a grandes empresas quantidades significativas de tempo e dinheiro.

2.2 O que é um problema de Programação Linear?

Os problemas de Programação Linear são uma subclasse de problemas de Programação Matemática (minimização ou maximização) de funções lineares, que satisfazem um conjunto de restrições, igualdades e/ou desigualdades lineares.

Num problema de Programação Linear existem três elementos fundamentais: um conjunto finito de variáveis, que se denominam **variáveis de decisão** (também designadas por principais ou controláveis), um conjunto finito de **restrições** que as variáveis têm que satisfazer (restrições funcionais e restrições de não negatividade) e uma função das variáveis a otimizar que se designa por **função objetivo** (ou função económica ou função critério).

Matematicamente, um problema de Programação Linear pode ser definido por:

Maximizar (ou minimizar)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \quad (ou \ \ge, \ ou \ =)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \quad (ou \ \ge, \ ou \ =)$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \quad (ou \ \ge, \ ou \ =)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

Nota: Os algoritmos de resolução dos problemas de Programação Linear obrigam a que as variáveis de decisão não possam assumir valores negativos, podendo esta condição não existir ao formular o problema (para além das variáveis não negativas $(x_i \ge 0)$, pode apresentar variáveis não positivas $\left(x_i \leq 0\right)$, ou ainda variáveis livres $\left(x_i \in IR\right)$). Assim, quando existem variáveis que não verificam a hipótese de não negatividade são substituídas por outras como se verá mais à frente neste trabalho.

A forma anteriormente apresentada denomina-se **forma geral**, já que a função objetivo pode ser maximizada ou minimizada e as restrições poderão ser de três tipos $\left(\leq, \quad \geq, \quad =\right)$. Nesta forma, admite-se ainda que um problema de Programação Linear possa, para além das variáveis não negativas $\left(x_i \geq 0\right)$, apresentar variáveis não positivas $\left(x_i \leq 0\right)$, ou livres $\left(x_i \in IR\right)$.

Se se pretender maximizar ou minimizar a função objetivo, sendo todas as restrições do tipo $(=)$ e todas as variáveis não negativas $\left(x_i \geq 0\right)$, diz-se que o problema de Programação Linear está na **forma canónica**.

Se se pretender maximizar a função objetivo, sendo todas as restrições do tipo $(\leq)$ e todas as variáveis não negativas $\left(x_i \geq 0\right)$, diz-se que o problema de Programação Linear está na **forma standard** de máximo.

Se se pretender minimizar a função objetivo, sendo todas as restrições do tipo $(\geq)$ e todas as variáveis não negativas $\left(x_i \geq 0\right)$, diz-se que o problema de Programação Linear está na **forma standard** de mínimo.

Mediante as operações convenientes é sempre possível dar a qualquer problema de Programação Linear uma destas três formas. Com efeito, tem-se:

i) Qualquer problema de minimização pode converter-se num problema de maximização, pois

$$\text{mínimo } z = \text{- máximo } (-z)$$

ii) Uma restrição de desigualdade do tipo $(\geq)$ pode ser convertida numa restrição do tipo $(\leq)$ se multiplicarmos por (-1) ambos os membros.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

iii) Uma restrição de igualdade pode sempre ser transformada em duas restrições de desigualdade.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n \le -b_i \end{cases}$$

iv) Para transformar uma restrição do tipo $(\le)$ numa restrição do tipo $(=)$ bastará adicionar ao primeiro membro de cada restrição uma variável de folga, não negativa, passando a desigualdade $(\le)$ a uma igualdade.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + F_i = b_i$$

Nota: as variáveis de folga representam usualmente os recursos disponíveis mas não utilizados.

v) Uma variável livre x_i (sem restrição de sinal) pode ser substituída pela diferença entre duas variáveis não negativas, isto é,

$$x_i = y_i - z_i \quad com \quad y_i, z_i \ge 0 \ , \ y_i = \max(0, x_i) \text{ e } z_i = \max(0, -x_i)$$

Nota: Embora y_i e z_i sejam não negativas, a sua diferença poderá ser positiva, nula ou negativa, garantindo-se que x_i é efetivamente uma variável livre. Na função objetivo e nas restrições, a variável x_i deverá ser trocada por $y_i - z_i$. O valor ótimo de x_i obtém-se facilmente a partir dos valores ótimos de y_i e de z_i: $x_i^* = y_i^* - z_i^*$ **(** x_i^* representa o valor ótimo de x_i).

2.3 Resolução de problemas de Programação Linear

A resolução de um problema de Programação Linear baseia-se na formulação de um modelo matemático e na aplicação de um procedimento para determinar a solução.

Nesta secção apresentam-se quatro problemas simples que podem servir de introdução ao tema e a sua resolução, que será comentada de forma a explicar todo o processo de resolução.

Problema 1

Produção de perfume

A PERFUMARTE é uma fábrica onde são produzidos dois tipos de Perfumes (A e B).

Estes perfumes são enriquecidos com dois aditivos. Por cada 1000 litros de perfume A são necessários um litro de aditivo P e três litros de aditivo Q. Por cada 1000 litros de perfume B são necessários dois litros de aditivo P e dois litros de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a PERFUMARTE não dispõe de mais de 20 litros e 30 litros, respetivamente, de aditivos P e Q.

Os donos da PERFUMARTE exigem que a produção mensal (4 semanas) conjunta dos perfumes A e B não seja inferior a 20 mil litros.

Por cada 1000 litros de perfume A vendidos, a PERFUMARTE tem um lucro de 7 unidades monetárias (u.m.), sendo de 10 u.m. o lucro associado à venda de 1000 litros de perfume B.

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da PERFUMARTE?

Resolução do *Problema 1*

Pode decompor-se o processo de formulação de um problema de Programação Linear nas seguintes etapas:

Etapa 1: Compreender o problema: identificar o tipo de problema (maximizar ou minimizar), o objetivo, as restrições e as variáveis de decisão, elaborar uma tabela ou um esquema que organize e sintetize os dados relevantes pode facilitar a compreensão das informações relativas aos recursos existentes;

Etapa 2: Definir as variáveis de decisão;

Etapa 3: Exprimir o objetivo em função das variáveis de decisão (definir a função objectivo);

Etapa 4: Exprimir cada restrição em função das variáveis de decisão.

Após a leitura atenta do enunciado do *Problema 1* pode dar-se início ao seu processo de formulação.

Etapa 1:

Os dados do problema podem ser organizados na seguinte tabela:

Tipo de perfume	Aditivo P ℓ/1000 ℓ	Aditivo Q ℓ/1000 ℓ	Lucro (u.m./1000 ℓ)	Produção mensal conjunta
A	1	3	7	4
B	2	2	10	4
Disponibilidade semanal	20	30	Mínimo mensal	20

Tabela 2.3.1-Dados do *Problema 1*

Etapa 2:

Neste problema pretende-se saber a quantidade de perfume do tipo A e do tipo B a produzir de forma a maximizar o lucro.

Assim, designe-se x_A a quantidade de perfume tipo A a produzir e x_B a quantidade de perfume tipo B a produzir. x_A e x_B são, portanto, as variáveis associadas a este problema.

Na definição das variáveis é fundamental dar particular atenção às unidades e ao período de tempo associado à produção de perfume, que devem ser especificados. Assim, como a disponibilidade de aditivos está expressa em litros por cada mil litros produzidos e é conhecido o lucro resultante da venda de mil litros de cada um dos dois tipos de perfume, opta-se por estabelecer a quantidade de perfume a produzir em milhares de litros. Deve indicar-se também se trata de uma produção semanal, mensal ou anual... Neste caso pode exprimir-se o objetivo numa base semanal, isto é maximizar o lucro semanal.

Redefinam-se, então, cuidadosamente, as variáveis:

x_A é a quantidade (em milhares de litros) de perfume A a produzir semanalmente

x_B é a quantidade (em milhares de litros) de perfume B a produzir semanalmente

Etapa 3:

No problema pretende-se determinar a melhor combinação da produção, de forma a obter lucro máximo.

O lucro depende da quantidade de perfume de cada tipo: A e B. É conhecido o lucro associado à venda de 1000 litros de perfume de cada tipo.

$7\,x_A$ é o lucro associado à venda semanal de perfume do tipo A

$10\,x_B$ é o lucro associado à venda semanal de perfume do tipo B

Portanto, o lucro global é dado por $7\,x_A + 10\,x_B$

A função que corresponde a esse objetivo, chamada de **função objetivo**, é

$$f(x_A, x_B) = Z = 7\,x_A + 10\,x_B$$

Etapa 4:

As restrições impostas refletem as limitações semanais da quantidade de aditivos usados na produção de cada um dos tipos de perfume. Assim, identificam-se duas restrições.

A primeira restrição está associada ao aditivo P. Por cada mil litros de perfume do tipo A são necessários 1 litro de aditivo P e cada mil litros de perfume do tipo B necessitam de 2 litros do mesmo aditivo. Deste modo, a quantidade de aditivo P necessária na produção de x_A milhares de litros de perfume do tipo A e x_B milhares de litros de perfume do tipo B é dada pela expressão

$$x_A + 2\,x_B$$

Dado que, em cada semana, a *PERFUMARTE* só tem disponíveis vinte litros de aditivo P, a restrição associada é definida pela desigualdade

$$x_A + 2\,x_B \leq 20$$

A segunda restrição corresponde à disponibilidade do aditivo Q. Por cada mil litros de perfume do tipo A são necessários três litros de aditivo Q e cada mil litros de perfume do tipo B necessita de dois litros do mesmo aditivo. Assim, a quantidade de aditivo Q necessária na produção x_A milhares de litros de perfume do tipo A e x_B milhares de litros de perfume do tipo B é dada pela expressão

$$3\,x_A + 2\,x_B\,.$$

Em cada semana, a *PERFUMARTE* só tem disponíveis trinta litros de aditivo Q pelo que, a restrição associada é definida pela desigualdade

$$3\,x_A + 2\,x_B \leq 30$$

Neste problema não faz sentido considerar a produção de perfume em quantidades negativas, desta forma, as restrições de não negatividade garantem que as variáveis de decisão não tomem valores negativos, ou seja,

$$x_A \geq 0 \text{ e } x_B \geq 0$$

Não há outros recursos envolvidos neste problema, mas há um condicionalismo que é imposto: "A produção mensal conjunta de A e B não deve ser inferior a 20 mil litros".

De acordo com a definição das variáveis e admitindo que um mês tem quatro semanas, como refere o enunciado, pode representar-se esse condicionalismo pela restrição seguinte:

$$4\left(x_A + x_B\right) \geq 20 \Leftrightarrow x_A + x_B \geq 5$$

Assim, o problema enunciado pode ser formulado (modelado matematicamente) do seguinte modo:

Sejam x_A *e* x_B *a quantidade (em milhares de litros) de perfume do tipo A e B, respetivamente, a produzir semanalmente. Queremos:*
Maximizar
$Z = 7\,x_A + 10\,x_B$
Sujeito a (s.a):
$x_A + 2\,x_B \leq 20$
$3\,x_A + 2\,x_B \leq 30$
$x_A + x_B \geq 5$
$x_A, x_B \geq 0$

Tabela 2.3.2-Modelo matemático do *Problema 1*

O método gráfico é um procedimento para determinar a solução de um problema de Programação linear e o indicado nos programas de matemática do Ensino Secundário.

É um método frequentemente utilizado quando o modelo se restringe a duas variáveis de decisão, porque implica a representação gráfica das restrições do problema e é fácil a representação gráfica bidimensional.

Note-se que a existência de três variáveis obrigaria a representações gráficas tridimensionais, o que não seria muito prático. Para os problemas que envolvem mais do que duas variáveis de decisão o Algoritmo Simplex, referido na secção 2.1, é o procedimento mais adequado. É um método algébrico de resolução de problemas de Programação Linear que não se aborda neste trabalho por se encontrar fora do âmbito dos programas neste nível de ensino.

O processo de resolução gráfico pode ser sistematizado em três fases:

1.ªfase: Representação das restrições funcionais e das restrições de não negatividade;

2.ªfase: Identificação do conjunto das soluções admissíveis do problema, também designado por região admissível ou domínio das soluções admissíveis, constituído pelo conjunto de pontos $(x, y) \in IR^2$ que satisfazem as restrições funcionais e as de não negatividade. Como as restrições definem semiplanos de IR^2, este conjunto resulta da interseção desses semiplanos;

3.ªfase: Obtenção da solução ótima, isto é, a que dá melhor valor à função objetivo.

De acordo com o modelo matemático obtido para o *Problema 1*, tem-se:

1.ªfase: Representação das restrições

Todas as restrições podem ser representadas graficamente [1] .

A primeira restrição funcional é a inequação linear $x_A + 2\,x_B \leq 20$. *O conjunto de pontos* (x_A, x_B) do plano que satisfazem esta condição é o semiplano abaixo da reta $x_A + 2\,x_B = 20$.

Para representar a restrição, começa-se por desenhar a reta, e, seguidamente, verificar se, por exemplo, a origem satisfaz a inequação, o que permite saber qual o semiplano que satisfaz a condição. Neste caso, verifica-se que o semiplano definido pela

[1]As representações gráficas presentes neste trabalho foram construídas com o software Geogebra

inequação contém a origem e portanto está abaixo da reta, como representado na figura 2.3.1.

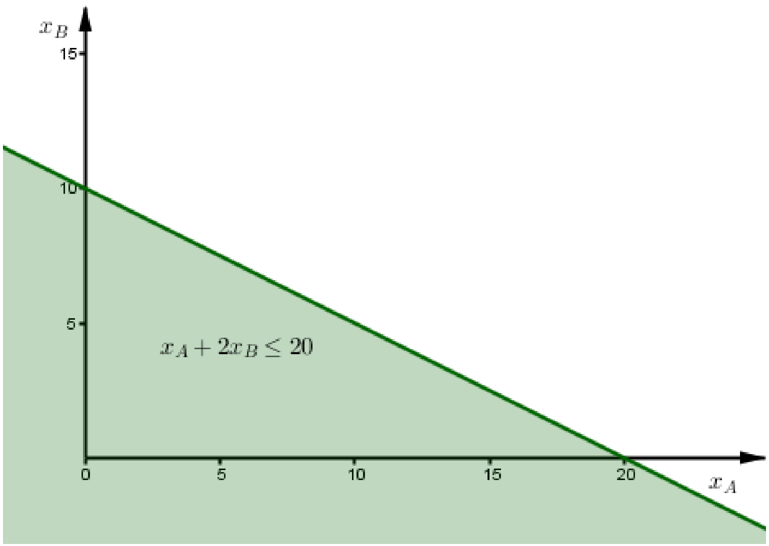


Figura 2.3.1-Representação gráfica da restrição $x_A + 2\,x_B \leq 20$

Nota: A representação da reta implica a determinação de dois pontos que lhe pertençam. Sugere-se, por exemplo, a determinação dos pontos de interseção da reta com os eixos coordenados.

Repetindo o procedimento para a segunda e terceira restrições funcionais, verifica-se que os semiplanos definidos por essas inequações, são os representados a seguir:

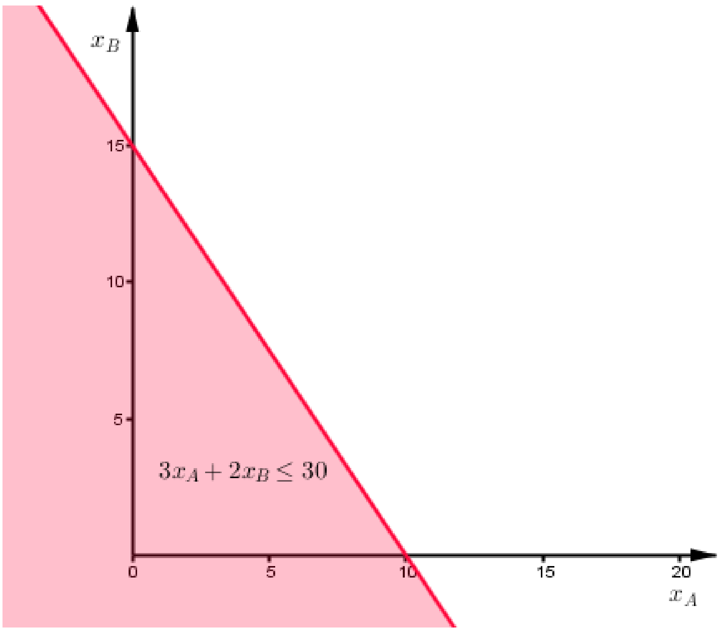


Figura 2.3.2-Representação gráfica da restrição $3\,x_A + 2\,x_B \leq 30$

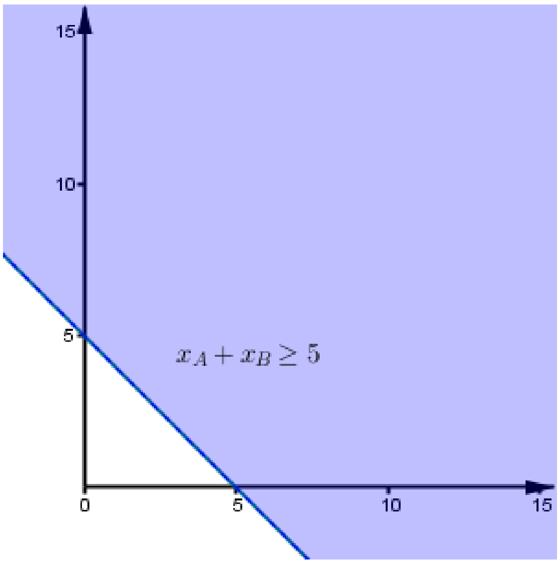


Figura 2.3.3-Representação gráfica da restrição $x_A + x_B \geq 5$

As duas restrições de não negatividade $x_A \geq 0$ e $x_B \geq 0$ impõem que o conjunto de pares ordenados (x_A, x_B), que representam as soluções possíveis do problema, se situe no primeiro quadrante.

2.ª fase: Região admissível

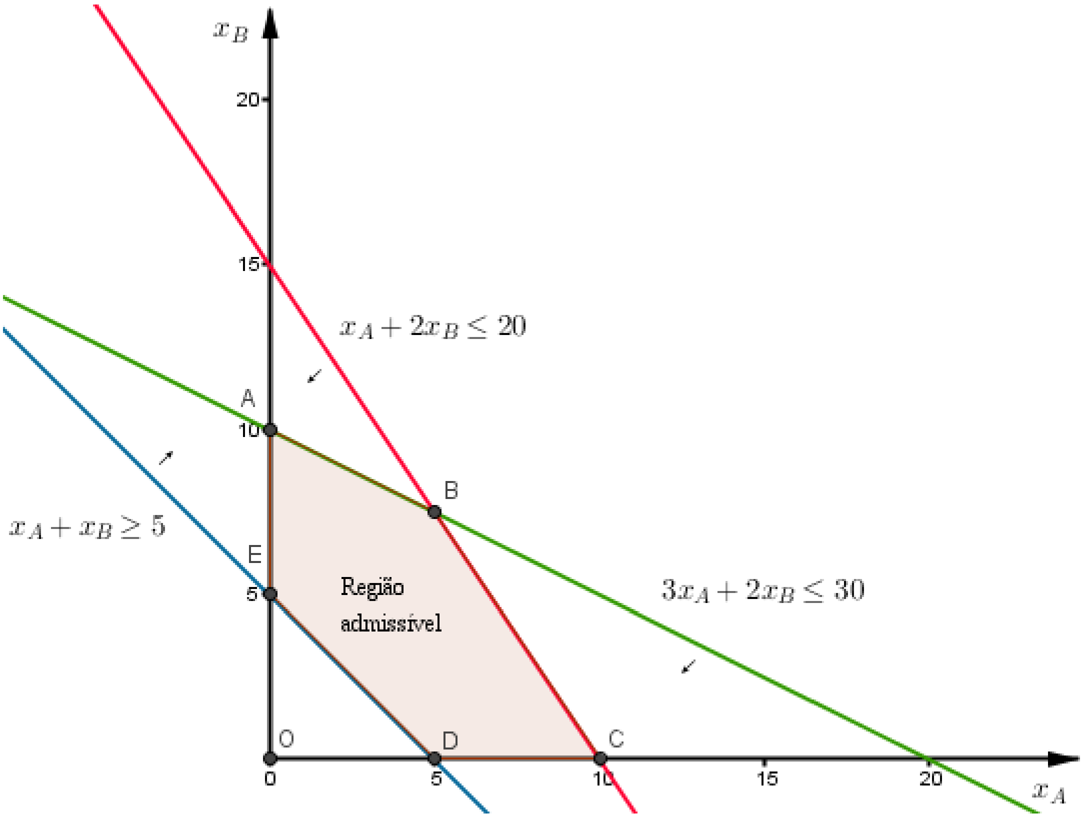


Figura 2.3.4 - Representação gráfica da região admissível do *Problema 1*

A região admissível, ou seja, o conjunto de pontos que verifica todas as restrições do problema, corresponde à interseção dos conjuntos das soluções admissíveis de cada inequação. Neste problema, a região de admissível é dada pelo conjunto de pontos na região colorida do gráfico da figura 2.3.4, que corresponde a um polígono convexo limitado pelas três restrições funcionais e pelas duas restrições de não negatividade.

3.ªfase: Solução óptima

A representação gráfica de problemas de Programação Linear com duas variáveis permite a **determinação da solução ótima** por dois processos distintos.

Processo 1: Por análise do comportamento da função objetivo na região admissível.

Processo 2: Por determinação das coordenadas dos vértices da região admissível e do valor da função objetivo em cada um deles.

Veja-se cada um dos dois processos aplicados ao *Problema 1*.

Processo 1:

Para determinar a solução ótima, é necessário analisar o comportamento da função objetivo na região admissível. Interessa encontrar o maior valor de Z tal que a reta correspondente contenha pelo menos um ponto da região admissível.

A função objetivo, $Z = 7x_A + 10x_B$, define uma família de retas paralelas, chamadas retas de nível, de declive $-\frac{7}{10}$ (repare-se que $Z = 7x_A + 10x_B \Leftrightarrow x_B = -\frac{7}{10}x_A + \frac{Z}{10}$).

Pretende-se que Z seja máximo. Assim, aumentando x_A e x_B aumenta Z, uma vez que ambas as variáveis tem coeficientes positivos ou, de outra forma, a ordenada na origem da família de retas definida por $x_B = -\frac{7}{10}x_A + \frac{Z}{10}$ é $\frac{Z}{10}$ e, portanto, Z é máximo na reta de nível com maior ordenada na origem.

A determinação da solução ótima passará pela determinação da reta de nível que tem maior ordenada na origem e que interseta a região admissível em pelo menos um ponto.

Fazendo $Z = 0$ obém-se a reta $7x_A + 10x_B = 0$ que passa na origem e com o mesmo declive das retas da família $Z = 7x_A + 10x_B$.

Assim, começa-se por desenhar a reta de nível $7x_A + 10x_B = 0$, que passa na origem do referencial, como ilustra a figura seguinte:

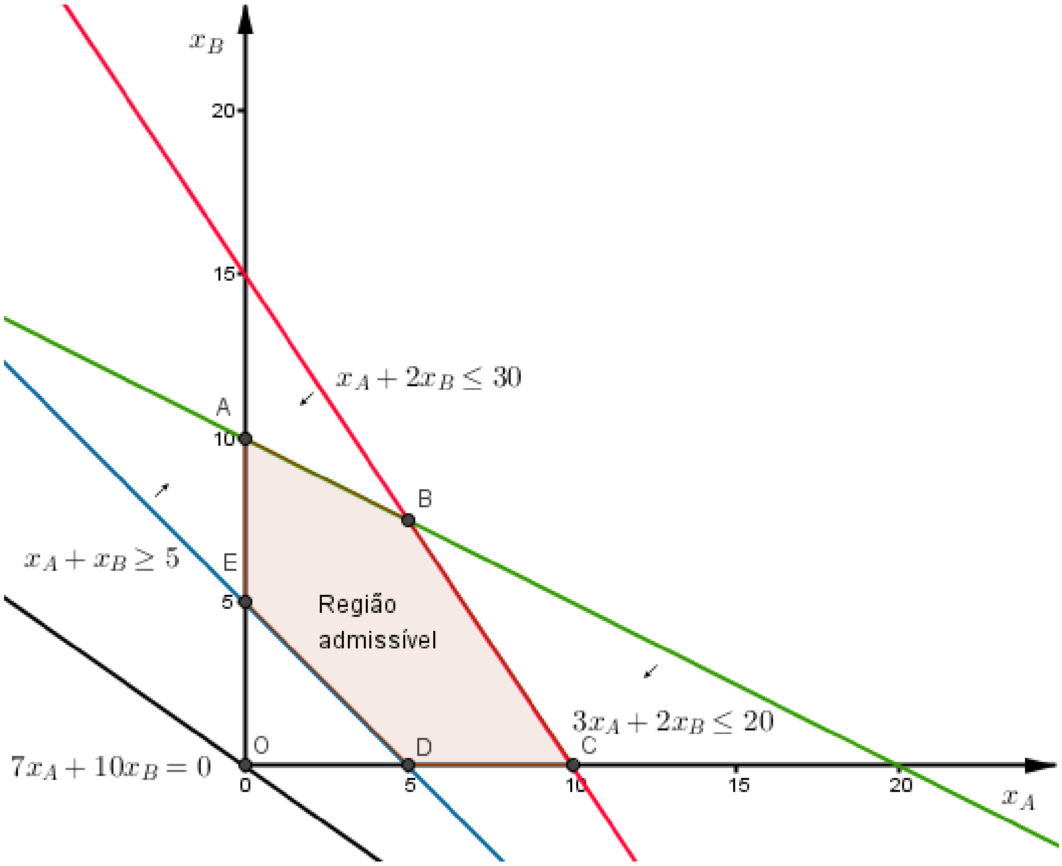


Figura 2.3.5-Representação gráfica da reta de nível $7x_A + 10x_B = 0$

A análise do comportamento da função objetivo na região admissível permite a determinação da solução óptima.

Deslocando a reta $7x_A + 10x_B = 0$ paralelamente a si própria no sentido do crescimento de x_A e x_B concluímos que o ponto B corresponde à solução óptima como se pode ver na figura 1.3.6.

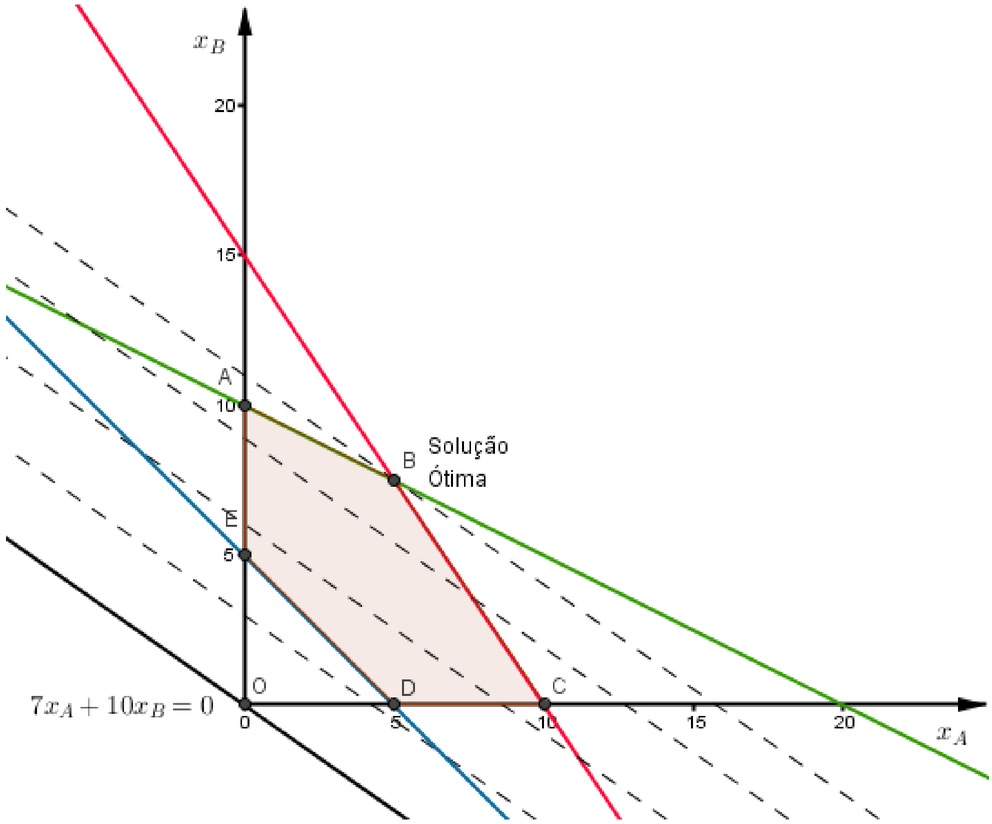


Figura 2.3.6-Análise do comportamento da função objetivo e determinação da solução ótima do *Problema 1*

Para determinar as coordenadas do ponto B, resolve-se o sistema de equações lineares constituído pelas retas de equação $3x_A + 2x_B = 30$ e $x_A + 2x_B = 20$, uma vez que este ponto é a interseção das retas definidas por estas equações.

$$\begin{cases} 3x_A + 2x_B = 30 \\ x_A + 2x_B = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(20 - 2x_B) + 2x_B = 30 \\ x_A = 20 - 2x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60 - 6x_B + 2x_B = 30 \\ x_A = 20 - 2x_B \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_B = -30 \\ x_A = 20 - 2x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 7{,}5 \\ x_A = 5 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto B são $(5; 7{,}5)$ e neste ponto o valor da função objetivo é $Z = 110$.

De acordo com o enunciado pode concluir-se que a empresa deve produzir semanalmente 5 mil litros de perfume do tipo A e 7,5 mil litros de perfume do tipo B, sendo de 110 unidades monetárias o correspondente lucro semanal.

Processo 2:

A determinação da solução ótima, por este processo, implica a utilização do seguinte resultado:

"Se um problema de programação linear tem solução ótima finita, há um vértice do domínio das soluções admissíveis que é ótimo."

Para aplicar este resultado basta calcular o valor da função objetivo em cada um dos vértices do domínio das soluções admissíveis e escolher o melhor.

Os pontos A, B, C, D *e* E são os vértices da região admissível do *Problema 1*.

É necessário conhecer as coordenadas desses cincos pontos. Para esse efeito, procede-se, para cada ponto, à resolução de um sistema de duas equações.

O ponto A é a interseção da reta de equação $x_A + 2\,x_B = 20$ com o eixo das ordenadas $(x_A = 0)$.

$$\begin{cases} x_A + 2\,x_B = 20 \\ x_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 10 \\ x_A = 0 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto A são $(0,10)$.

O ponto B é a interseção das retas de equações $3\,x_A + 2\,x_B = 30$ e $x_A + 2\,x_B = 20$ e as suas coordenadas, já determinadas anteriormente, são $(5;7{,}5)$.

O ponto C é a intersecção da reta $3\,x_A + 2\,x_B = 30$ com o eixo das abcissas $(x_B = 0)$.

$$\begin{cases} 3\,x_A + 2\,x_B = 30 \\ x_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 10 \\ x_B = 0 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto C são $(10,0)$.

Os pontos D e E são os pontos de interseção da reta de equação $x_A + x_B = 5$ com os eixos das abcissas e ordenadas, respetivamente.

Para o ponto D tem-se:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 5 \\ x_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 5 \\ x_B = 0 \end{cases}$$

Para o ponto E ,tem-se:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 5 \\ x_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ x_A = 0 \end{cases}$$

As coordenadas dos pontos D e E são respetivamente $(5,0)$ e $(0,5)$.

Veja-se então em qual dos vértices da região admissível é que a função objetivo toma o valor máximo.(tabela 2.3.3).

Vértice	x_A	x_B	$Z = 7x_A + 10x_B$
A	0	10	$7\times 0 + 10\times 10 = 100$
B	5	7,5	$7\times 5 + 10\times 7{,}5 = 110$
C	10	0	$7\times 10 + 10\times 0 = 70$
D	5	0	$7\times 5 + 10\times 0 = 35$
E	0	5	$7\times 0 + 10\times 5 = 50$

Tabela 2.3.3-Valor da função objetivo em cada vértice da região admissível do *Problema 1*

Desta forma, conclui-se que a função objetivo tem valor máximo no vértice B, ou seja, a *PERFUMARTE* deve produzir semanalmente 5 mil litros de perfume tipo A e 7,5 mil litros de perfume do tipo B para obter um lucro máximo de 110 unidades monetárias.

A interpretação da solução ótima não deve restringir-se à leitura dos valores das variáveis de decisão e da função objetivo. É importante ter conhecimento de como as restrições estão a ser satisfeitas. Esta informação obtém-se substituindo os valores da solução ótima, $x_A = 5$ e $x_B = 7{,}5$, em cada restrição.

Com efeito, tem-se que:

A solução ótima (ponto B) está na interseção das retas correspondentes às restrições $x_A + 2x_B \le 20$ e $3x_A + 2x_B \le 30$. São chamadas, por isso, restrições **ativas** ou **saturadas**. Com a produção semanal de 5 mil litros de perfume do tipo A e 7,5 mil litros de perfume do tipo B os recursos inicialmente disponíveis, 20 litros de aditivo P e 30 litros de aditivo Q, são utilizados na sua totalidade $\left(5 + 2\times 7{,}5 = 20 \;\; e \;\; 3\times 5 + 2\times 7.5 = 30\right)$.

A restrição $x_A + x_B \geq 5$ não interfere na procura da solução ótima (restrição **não ativa**). O valor ótimo não viria alterado mesmo que essa restrição não existisse. Na realidade, esta restrição é satisfeita com uma folga de 7,5, ou seja, são produzidos mais que os 20 mil litros (5 mil por semana) exigidas pelos donos da *PERFUMARTE* $(5+7{,}5=12{,}5\geq 5)$.

Problema 2

O exemplo que se segue é um problema de minimização de custos.

Problema de Dieta

Numa empresa de suinicultura, é necessário fornecer a cada animal adulto, diariamente, além da alimentação padrão, um suplemento de Granulado e Farinha.

Sabe-se que:

- *cada quilograma de Granulado contém 30 gramas de hidratos de carbono, 75 gramas de vitaminas e 45 gramas de proteínas;*
- *cada quilograma de Farinha contém 75 gramas de hidratos de carbono, 15 gramas de vitaminas e 45 gramas de proteínas;*
- *o suplemento diário de Granulado e Farinha dado a cada animal adulto, para ser adequado, deve conter pelo menos 300 gramas de hidratos de carbono, pelo menos 225 gramas de vitaminas e pelo menos 315 gramas de proteínas;*
- *o suplemento diário dado a cada animal adulto não deve conter mais de 10 quilogramas de Granulado nem mais de 15 quilogramas de Farinha.*

Sabe-se ainda que cada quilograma de Granulado custa 5 euros e que cada quilograma de Farinha custa 2,5 euros.

Determine quantos quilogramas de Granulado e quantos quilogramas de Farinha deve conter o suplemento diário dado a cada animal adulto, de modo que, nas condições referidas, o custo desse suplemento seja mínimo.

Exame de Matemática B, 1.ª fase, 2012 (adaptado)

Resolução do *Problema 2*

Os dados do problema podem ser organizados na tabela 2.3.4.

	Hidratos de Carbono (g/kg)	Vitaminas (g/kg)	Proteínas (g/kg)	Quantidade diária máxima (kg)	Custo (euros/kg)
Granulado	30	75	45	10	5
Farinha	75	15	45	15	2,5
Necessidade Diária mínima (g)	300	225	315		

Tabela 2.3.4-Dados do *Problema 2*

Neste problema pretende-se saber quantos quilogramas de granulado e quantos quilogramas de farinha deve conter o suplemento diário dado a cada animal adulto, de modo a que o custo desse suplemento seja mínimo.

As **variáveis** associadas a este problema são:

x o número de quilogramas de granulado que o suplemento diário dado a cada animal adulto contém

y o número de quilogramas de farinha que o suplemento diário dado a cada animal adulto contém

O custo depende da quantidade de granulado e farinha usados no suplemento. É conhecido o custo de um quilograma de cada um destes componentes.

$5x$ é o custo associado à quantidade de granulado usada no suplemento

$2.5y$ é o custo associado à quantidade de farinha usada no suplemento

O custo global é então $5x + 2{,}5y$

A **função objetivo** é $Z = 5x + 2{,}5y$

Neste problema podem identificar-se três **restrições**, que refletem as quantidades diárias de hidratos de carbono, vitaminas e proteínas que o suplemento diário deve conter.

A primeira restrição está associada aos hidratos de carbono. A quantidade (em gramas) de hidratos de carbono presentes em x quilogramas de granulado e y quilogramas de farinha é dada pela expressão $30x + 75y$. Dado que, diariamente, cada animal deve ingerir pelo menos 300 gramas de hidratos de carbono, a restrição associada é definida pela desigualdade $30x + 75y \geq 300$.

A segunda restrição está associada às vitaminas. A quantidade (em gramas) de vitaminas presentes em x quilogramas de granulado e y quilogramas de farinha é dada pela expressão $75x+15y$. Dado que, diariamente, cada animal deve ingerir pelo menos 225 gramas de vitaminas, a restrição associada é definida pela desigualdade $75x+15y \geq 225$.

A terceira restrição está associada às proteínas. A quantidade (em gramas) de proteínas presentes em x quilogramas de granulado e y quilogramas de farinha é dada pela expressão $45x+45y$. Dado que, diariamente, cada animal deve ingerir pelo menos 315 gramas de proteínas, a restrição associada é definida pela desigualdade $45x+45y \geq 315$.

Há ainda outra condição imposta que se refere à quantidade máxima que o suplemento diário deve conter de granulado e farinha. As restrições que garantem o cumprimento dessa condição são $x \leq 10$ e $y \leq 15$.

Finalmente, as restrições de não negatividade que garantem que as variáveis de decisão não tomam valores negativos: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

O modelo matemático do problema é:

Sejam x e y a quantidade (em quilogramas) de granulado e farinha que o suplemento diário de um animal adulto deve conter. Queremos:

Minimizar

$$Z = 5x + 2{,}5y$$

s.a:

$$30x+75y \geq 300$$

$$75x+15y \geq 225$$

$$45x+45y \geq 315$$

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 15$$

Tabela 2.3.5-Modelo matemático do *Problema 2*

Após a formulação do problema, veja-se qual é a região admissível definida pelas restrições anteriores.

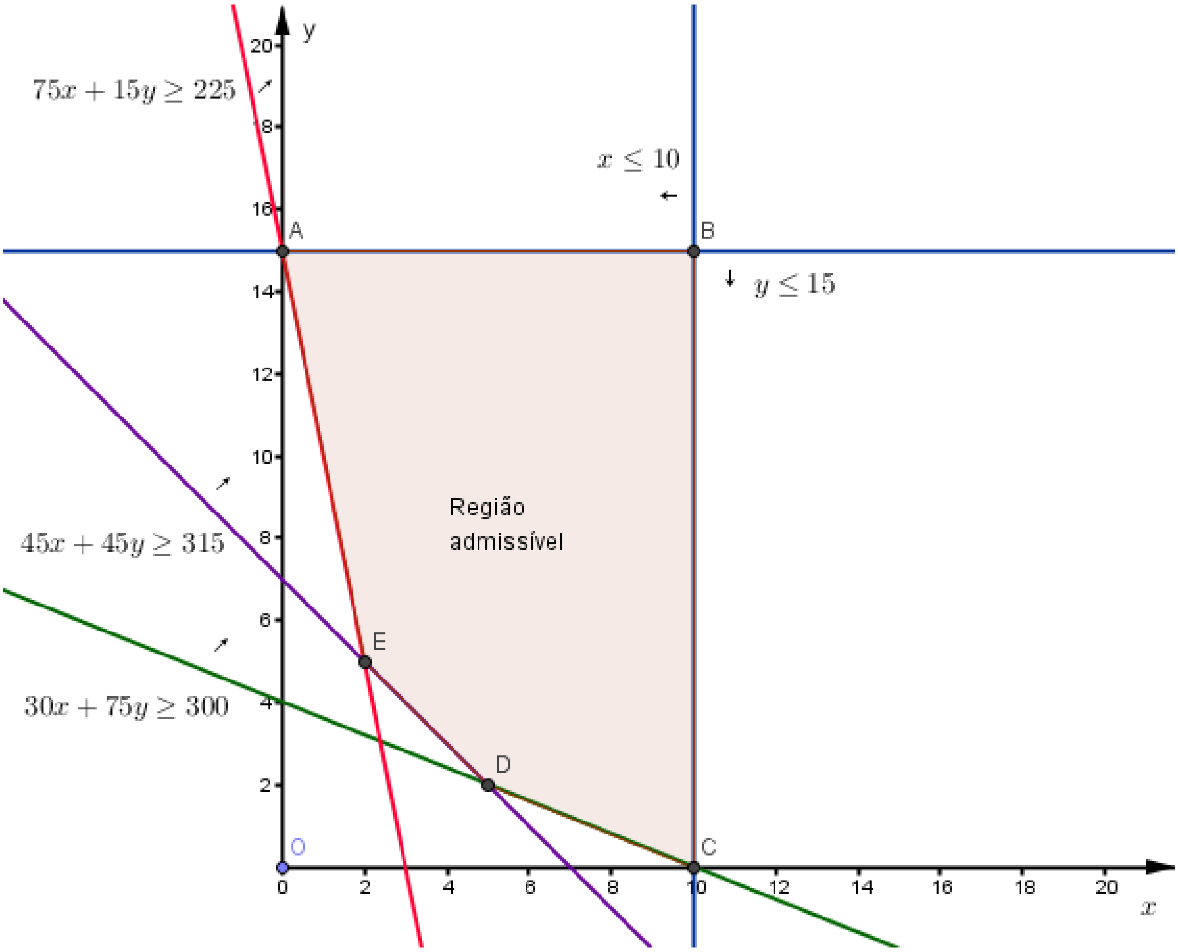


Figura 2.3.7-Representação gráfica da região admissível do *Problema 2*

Após a representação gráfica da região admissível, a determinação da solução ótima pode ser feita pelos dois processos já anteriormente explicitados.

Processo 1:

Por este processo, para determinar a solução ótima, é necessário analisar o comportamento da função objetivo na região admissível. Interessa encontrar o menor valor de Z tal que a reta correspondente contenha pelo menos um ponto da região admissível.

A função objetivo, $Z = 5x + 2{,}5y$ pode ser escrita na sua forma equivalente $y = -2x + \dfrac{Z}{2{,}5}$ Esta equação define uma família de retas cuja ordenada na origem é $\dfrac{Z}{2{,}5}$.

Determinar a solução ótima é determinar a reta de nível que tem menor ordenada na origem, uma vez que se quer que Z seja mínimo e passe na região região admissível.

Começa-se por desenhar uma reta de nível atribuindo um valor a Z, por exemplo, $Z = 0$: $y = -2x$ e deslocando esta reta, que passa na origem do referencial, paralelamente a si própria, dentro da região admissível, no sentido do decrescimento de Z. Assim a minimização da função objetivo é atingida no ponto E como ilustra a figura seguinte:

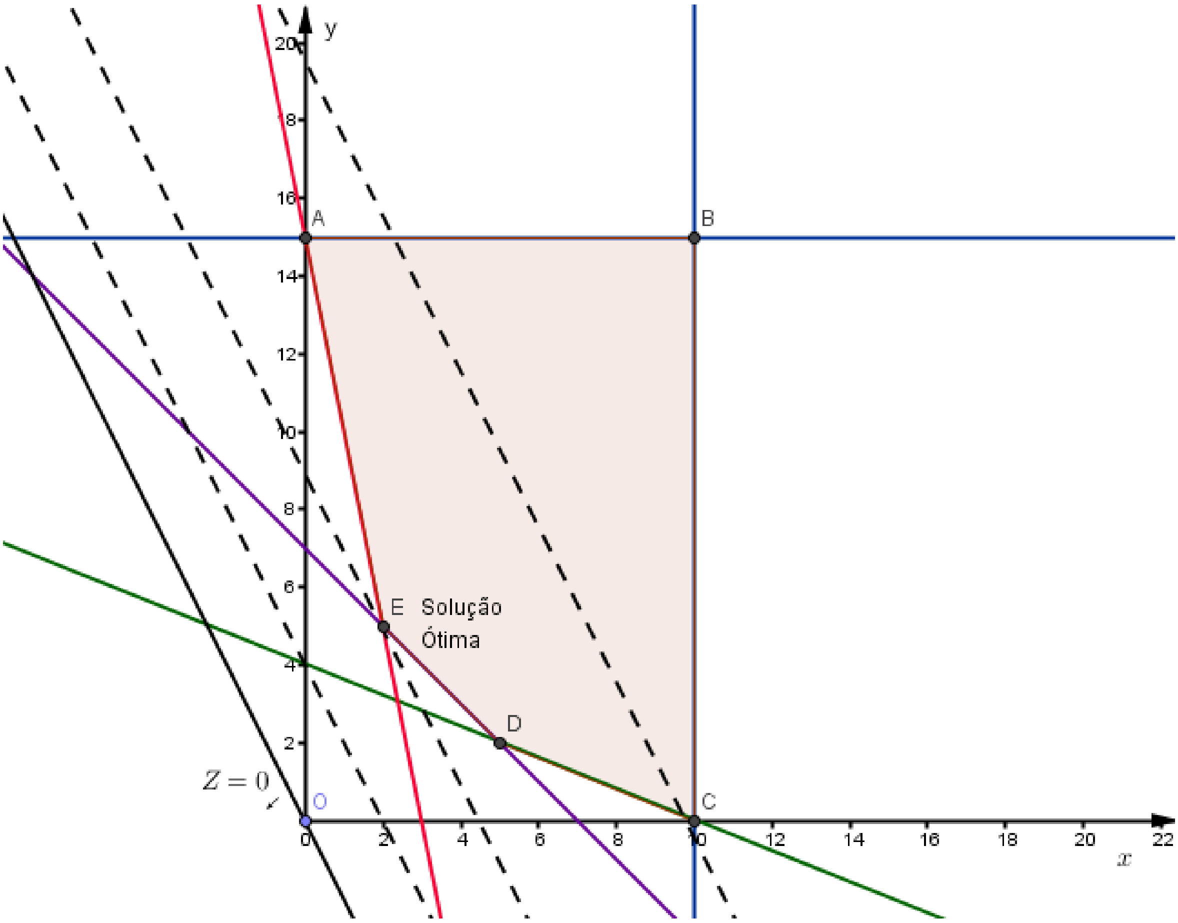


Figura 2.3.8-Análise do comportamento da função objetivo e determinação da solução ótima do *Problema 2*

Para determinar as coordenadas do ponto E, resolve-se o sistema de equações lineares constituído pelas retas de equações $x+y=7$ e $5x+y=15$, uma vez que este ponto é a interseção das retas definidas por estas equações.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 5x+y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ 5x+7-x=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ 4x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ x=\dfrac{8}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=2 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto E são $(2;5)$ e neste ponto o valor da função objetivo é $Z=22{,}5$.

Processo 2:

Os vértices da região admissível são os pontos A, B, C, D e E. As suas coordenadas são: $A(0,15)$, $B(10;15)$, $C(10,0)$ $D(2,5)$ e $E(2,5)$[2].

Veja-se em qual dos vértices da região admissível é que a função objetivo toma o valor mínimo (tabela 2.3.6).

Vértice	x	y	$Z = 5x + 2{,}5y$
A	0	15	37,5
B	10	15	87,5
C	10	0	50
D	5	2	30
E	2	5	22,5

Tabela 2.3.6-Valor da função objetivo em cada vértice da região admissível do *Problema 2*

A função objetivo tem valor mínimo no vértice E, único vértice em que a função objetivo tem o valor $22{,}5$.

Pode concluir-se que, se a empresa pretende gastar o menos possível ($22{,}5$ euros), o suplemento diário dado a cada animal deve conter 2 quilogramas de granulado e 5 quilogramas de farinha.

Por último, é feita a análise de como as restrições estão a ser satisfeitas.

Na primeira restrição relativa à quantidade de hidratos de carbono, verifica-se que o suplemento contém mais 135 gramas do que o mínimo exigido:

$$30 \times 2 + 75 \times 5 = 435 (\geq 300)$$

Na segunda e terceiras restrições, associadas, respetivamente, às vitaminas e proteínas, verifica-se que o suplemento contém o mínimo exigido destes dois aditivos:

$$75 \times 2 + 15 \times 5 = 225 (\geq 225) \text{ (Vitaminas)}$$

$$45 \times 2 + 44 \times 5 = 315 (\geq 315) \text{ (Proteínas)}$$

Pode ainda verificar-se que as restrições relativas à quantidade máxima que o suplemento deve conter de granulado e farinha, não são ativas no ótimo. A solução ótima apenas contém 2kg de granulado e 5kg de farinha, quando podia conter até 10kg de granulado e 15kg de farinha.

[2] O processo de determinação das coordenadas dos vértices da região admissível é igual ao utilizado para o *Problema 1*

Problema 3

O exemplo que a seguir se apresenta é um problema de **Programação Linear Inteira**.

As restrições e a função objetivo são lineares mas as variáveis são inteiras (respeitando ainda a condição de não negatividade).

A formulação de problemas de Programação Linear Inteira segue um raciocínio exatamente igual ao seguido para a formulação dos problemas anteriores não apresentando qualquer particularidade por se exigir que as variáveis tomem valores inteiros, devendo apenas acrescentar-se na sua formulação as restrições de integralidade.

A resolução de problemas deste tipo exige alguns cuidados especiais e pode ser feita do seguinte modo:

1.º-Resolução do problema que se obtém ignorando as restrições de integralidade, ao qual chamamos **problema relaxado**.

2.º-Se a solução ótima do problema relaxado for inteira, então é também a solução ótima do problema de Programação Linear Inteira.

Caso contrario, é necessário identificar na região admissível do problema relaxado a "melhor" solução inteira, podendo esta não ser única.

Ponte aérea

Pretende-se organizar uma ponte aérea para transportar 1600 pessoas e 90 toneladas de bagagem.

Os aviões disponíveis são de dois tipos: 12 do tipo A e 9 do tipo B. Com carga completa, um avião do tipo A pode transportar 200 pessoas e 6 toneladas de bagagem. Um avião do tipo B pode transportar 100 pessoas e 15 toneladas de bagagem.

Quantos aviões de cada tipo devem ser contratados para que o custo do aluguer seja mínimo, sabendo que o aluguer do avião de tipo A custa 4 milhões de euros e o de tipo B custa 1 milhão de euros?

Infinito 11A, Vol.I, Areal Editores

Resolução do *Problema 3*

O processo de formulação deste problema começa com a elaboração de uma tabela que resume os dados do problema.

Tipo de avião	Preço do aluguer (milhões de euros)	Número de aviões disponíveis	Carga completa	
			Número de pessoas	Bagagem (toneladas)
A	4	12	200	6
B	1	9	100	15
		Total a transportar	1600	90

Tabela 2.3.7-Dados do *Problema 3*

Neste problema pretende-se saber quantos aviões do tipo A e do tipo B devem ser contratados. Designando estas quantidades por x e y, respetivamente, tem-se que as **variáveis de decisão** são

x a quantidade de aviões do tipo A contratar

y a quantidade de aviões do tipo B contratar

Cada avião do tipo A é contratado por 4 milhões de euros e cada avião do tipo B é contratado por 1 milhão de euros.

O custo global é dado por $4x+y$.

O objetivo do problema é minimizar o custo do aluguer dos aviões. A **função objetivo** é $Z=4x+y$.

Podem identificar-se no problema as seguintes **restrições**:

$x \leq 12$, uma vez que existem apenas 12 aviões do tipo A disponíveis.

$y \leq 9$, pois apenas estão disponíveis 9 aviões do tipo B para alugar.

Sabe-se ainda que o número de lugares terá de ser igual ou superior ao número de pessoas a transportar, ou seja, $200x+100y \geq 1600$.

De forma análoga, a capacidade de carga terá de ser igual ou superior à bagagem a transportar, isto é, $6x+15y \geq 90$.

A estas restrições devem acrescentar-se ainda as condições $x \geq 0$ e $y \geq 0$ que garantem a não negatividade das variáveis.

Finalmente, e como não faz sentido o aluguer de um número não inteiro de aviões, as soluções possíveis do problema restringem-se a quantidades inteiras, ou seja, $x, y \in Z$.

Pode agora resumir-se a **formulação** do problema:

Sejam x e y o número de aviões do tipo A e do tipo B a contratar. Queremos: *Minimizar* $Z = 4x + y$ *s.a:* $200\,x + 100\,y \geq 1600$ $6\,x + 15\,y \geq 90$ $0 \leq x \leq 12$ $0 \leq y \leq 9$ $x, y \in Z$

Tabela 2.3.8-Modelo matemático do *Problema 3*

Na figura 2.3.9, encontra-se representada a região admissível do problema relaxado.

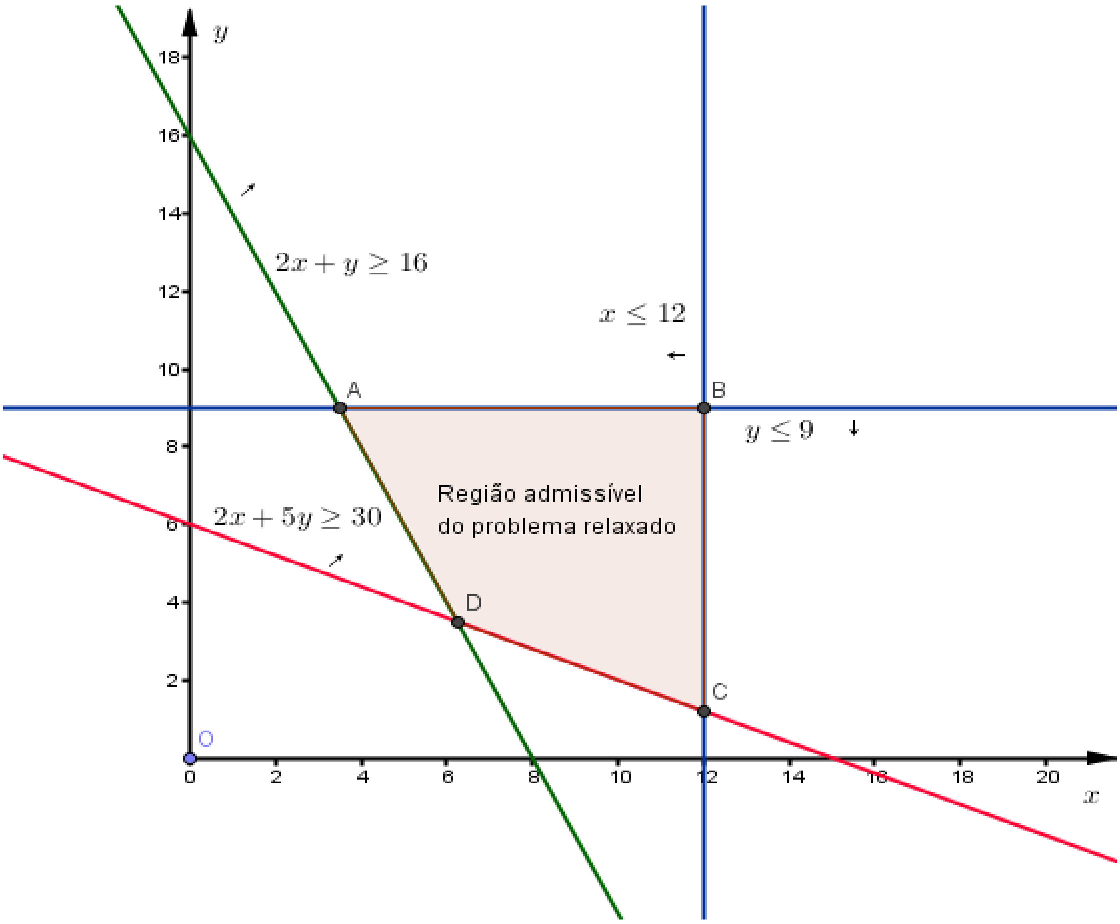


Figura 2.3.9-Representação gráfica da região admissível do *Problema 3*

A solução ótima do problema relaxado encontra-se num dos vértices da região admissível:

Vértice	x	y	$Z = 4x + y$
A	$\frac{7}{2}$	9	23
B	12	9	57
C	12	$\frac{6}{5}$	49,2
D	$\frac{25}{4}$	$\frac{7}{2}$	28,5

Tabela 2.3.9-Determinação dos vértices da região admissível do *Problema 3*

Como se pode observar na tabela anterior, a solução ótima do problema relaxado (ponto A) não respeita a condição de integralidade da variável x, pelo que não é adequada como solução ótima do problema de Programação Linear Inteira.

É necessário agora procurar na região admissível do problema relaxado uma solução inteira por identificação das soluções admissíveis inteiras na vizinhança de A.

Figura 2.3.10-Determinação da solução ótima do *Problema 3*

Para determinar a solução ótima, analise-se o comportamento da função objetivo $Z = 4x + y$ na região admissível.

$$Z = 4x + y \Leftrightarrow y = -4x + Z$$

Fazendo, por exemplo, $Z = 0$, obtém-se a reta de nível $y = -4x$ e deslocando esta reta, paralelamente a si própria, no sentido do decrescimento de Z verifica-se que a a solução inteira que conduz ao menor valor da função objetivo é o ponto de coordenadas $(4{,}8)$.

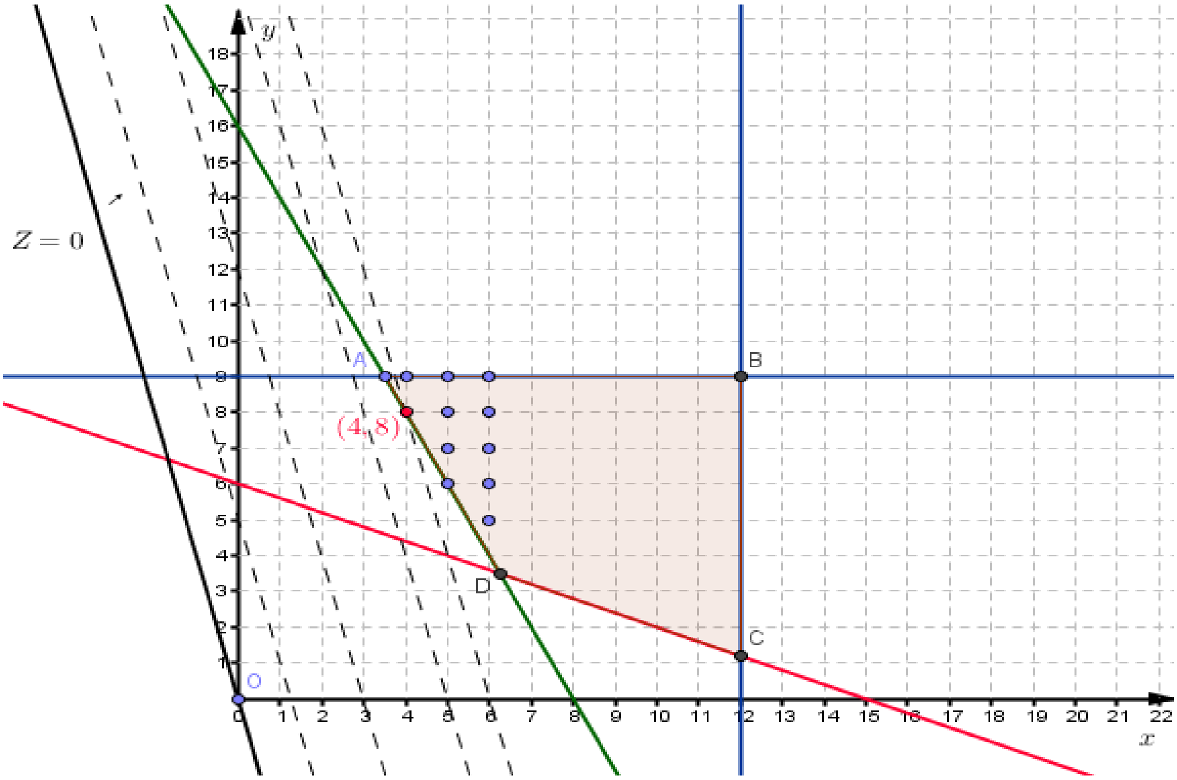


Figura 2.3.11- Análise do comportamento da função objetivo e determinação da solução óptima do *Problema 3*

Assim, devem ser contratados 4 aviões do tipo A e 8 aviões do tipo B. O custo do aluguer é de 24 milhões de euros.

Relativamente ao modo como as restrições estão a ser satisfeitas conclui-se que:

Na primeira restrição verifica-se o número de lugares disponíveis com esta solução é igual ao número de pessoas a transportar.

$$200 \times 4 + 100 \times 8 = 1600\,(\geq 1600)$$

Na segunda restrição verifica-se que a capacidade de carga dos aviões contratatos é superior ao número de toneladas a transportar.

$$6 \times 4 + 15 \times 8 = 144 \, (\geq 90)$$

Pode ainda constatar-se que as restrições relativas ao número de aviões disponíveis de cada tipo não são ativas no ótimo. A solução ótima implica a contratação de 4 aviões do tipo A quando podiam ser contratados até 12 e 8 aviões do tipo B quando podiam ser contratados 9.

Problema 4

A resolução dos problemas anteriores conduziu sempre à determinação de uma única solução ótima. O exemplo que se irá apresentar a seguir envolve múltiplas soluções ótimas.

Campanha de saldos

Uma loja de artigos de desporto tem em stock 90 fatos de treino e 50 pares de sapatilhas, que pretende colocar à venda na próxima campanha de saldos de Natal.

Para o efeito, está prevista a constituição de dois tipos de packs:

Pack A: 2 fatos de treino + 1 par de sapatilhas, com o preço de 30€.

Pack B: 3 fatos de treino + 2 pares de sapatilhas, com o preço de 45€.

Quantos packs de cada tipo deve o dono da loja constituir para que a receita da venda seja máxima?

Novo Espaço, Parte 1, Porto Editora

Resolução do *Problema 4*

A tabela seguinte ajuda a organizar os dados do problema:

Tipo de Pack	Número de fatos de treino	Número de pares de sapatilhas	Preço do Pack (euros)
A	2	1	30
B	3	2	45
Disponibilidade em stock	90	50	

Tabela 2.3.10-Dados do *Problema 4*

Pretende-se saber quantos packs de cada tipo deve o dono da loja constituir para obter receita máxima com a venda.

As variáveis do problema são:

x o número de packs do tipo A a constituir

y o número de packs do tipo B a constituir

Sabe-se que a loja vende cada pack do tipo A por 45 euros e cada pack do tipo B por 30 euros.

A receita global obtida com a venda de x packs do tipo A e y packs do tipo B é $45x + 30y$.

O objetivo do problema é maximizar a receita da venda destes packs. A **função objetivo** é $Z = 30x + 45y$.

Analisando o problema podem identificar-se as seguintes **restrições**:

A restrição associada à disponibilidade de fatos de treino: $2x + 3y \leq 90$

A restrição associada à disponibilidade de pares de sapatilhas: $x + 2y \leq 50$

As restrições de não negatividade: $x \geq 0$ e $y \geq 0$

As restrições de integralidade: $x, y \in Z$

Pode resumir-se a **formulação** do problema do seguinte modo:

Sejam x e y o número de packs do tipo A e do tipo B a constituir. Pretende-se:
Maximizar
$Z = 30x + 45y$
s.a:
$2x + 3y \leq 90$
$x + 2y \leq 50$
$x, y \geq 0$
$x, y \in Z$

Tabela 2.3.11-Modelo matemático do *Problema 4*

A região admissível é a que se apresenta a seguir:

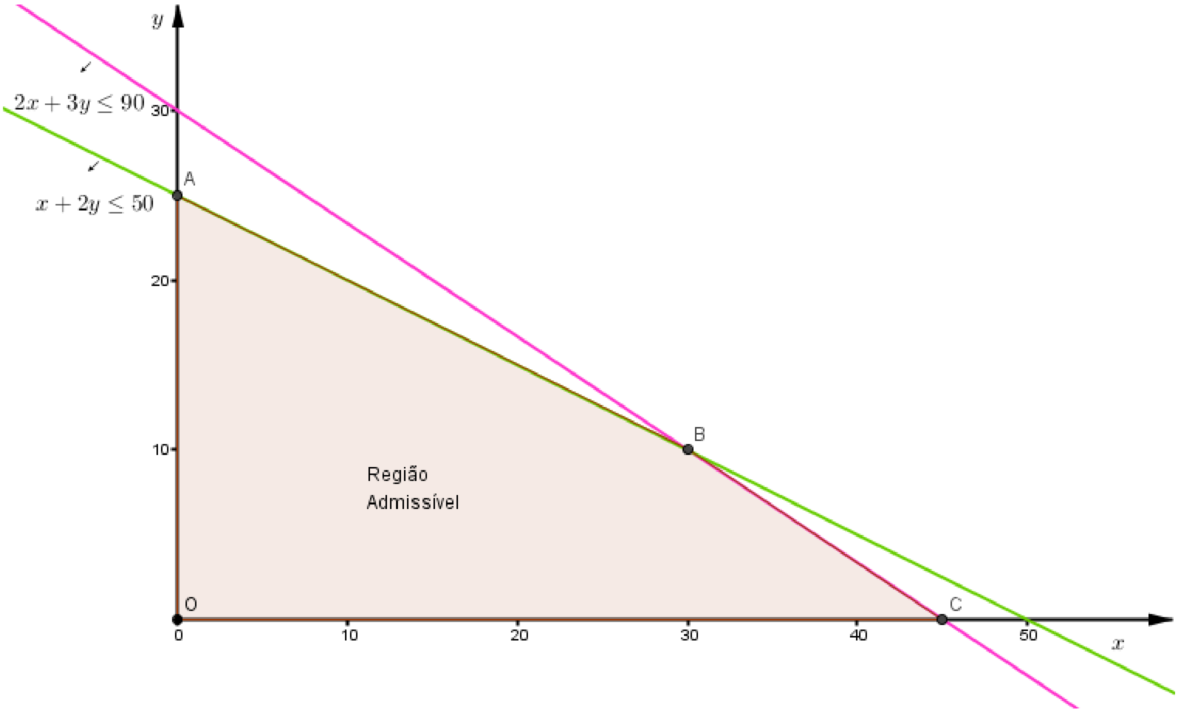


Figura 2.3.12-Representação gráfica da região admissível do *Problema 4*

Veja-se o que acontece à família de retas $Z = 30x + 45y$ deslocando a reta de nível $30x + 45y = 0$ paralelamente a ela própria no sentido da maximização da função objetivo (Processo 1).

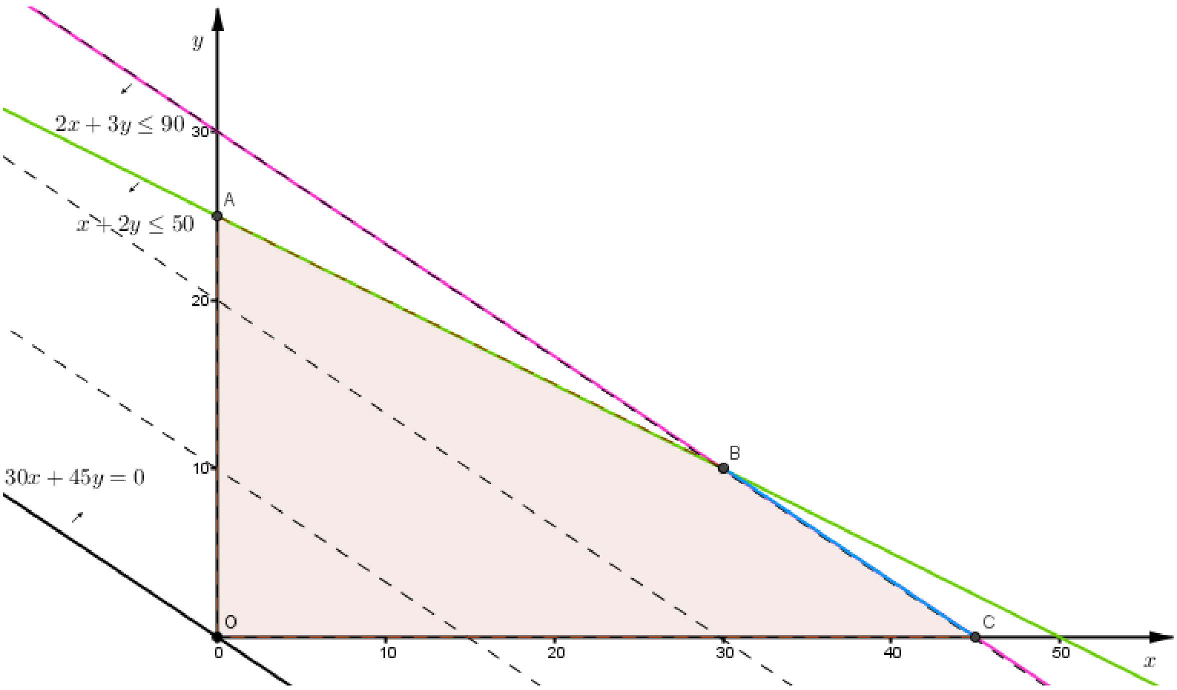


Figura 2.3.13- Análise do comportamento da função objetivo e determinação da solução ótima do *Problema 4*

Neste caso não se tem um só vértice da região admissível como solução óptima. Os pontos B e C são soluções ótimas, bem como todos os pontos de coordenadas inteiras do segmento de reta $[BC]$.

Também, calculando as coordenadas dos vértices da região admissível, se obtém (processo 2):

Vértice	x	y	$Z = 30x + 45y$
O	0	0	0
A	0	25	1125
B	30	10	1350
C	45	0	1350

Tabela 2.3.12- Valor da função objetivo em cada vértice da região admissível do *Problema 4*

Determinem-se agora os pontos do segmento de reta $[BC]$de coordenadas inteiras.

Este procedimento implica determinar as coordenadas dos pontos que pertencem à reta de equação $2x + 3y = 90$ e cuja abcissa toma os valores inteiros no intervalo $]30, 45[$

x	$y = -\frac{2}{3}x + 30$	$Z = 30x + 45y$
31	$\frac{28}{3}$	---
32	$\frac{26}{3}$	---
33	8	1350
34	$\frac{22}{3}$	---
35	$\frac{20}{3}$	---
36	6	1350
37	$\frac{16}{3}$	---

38	$\frac{14}{3}$	---
39	4	1350
40	$\frac{10}{3}$	---
41	$\frac{8}{3}$	---
42	2	1350
43	$\frac{4}{3}$	---
44	$\frac{2}{3}$	---

Tabela 2.3.13 – Determinação das soluções ótimas do *Problema 4*

Assim, podem fazer-se 6 combinações diferentes na constituição dos packs, obtendo-se sempre uma receita de 1350 euros:

30 packs do tipo A e 10 packs do tipo B

33 packs do tipo A e 8 packs do tipo B

36 packs do tipo A e 6 packs do tipo B

39 packs do tipo A e 4 packs do tipo B

42 packs do tipo A e 2 packs do tipo B

45 packs do tipo A e 0 packs do tipo B

2.4 O uso da tecnologia no ensino da Programação Linear

O tema da Programação Linear permite a possibilidade de explorar o uso de tecnologias como a calculadora gráfica e software computacional (neste trabalho a opção incidiu na exploração do Microsoft Excel).

Segundo o programa de matemática A, "*Não é possível atingir os objetivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e* *variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores).*" (Ministério da Educação, 2001)

No que respeita às calculadoras gráficas, de uso obrigatório, o programa de Matemática A considera-as "*ferramentas que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa.*" e por outro lado, "*o computador pelas suas potencialidades,…, permite atividades de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores...*" (Ministério da Educação, 2001)

Para ilustrar a simplicidade e potencialidades do recurso a estas ferramentas na resolução de problemas de Programação Linear, escolheu-se o modelo formulado para o *Problema 2*, anteriormente resolvido pelo método gráfico.

Sejam x e y a quantidade (em quilogramas) de granulado e farinha que o suplemento diário de um animal adulto deve conter. Queremos:

Minimizar

$$Z = 5x + 2{,}5y$$

s.a:

$$30x + 75y \geq 300$$
$$75x + 15y \geq 225$$
$$45x + 45y \geq 315$$
$$0 \leq x \leq 10$$
$$0 \leq y \leq 15$$

A calculadora gráfica

A resolução do *Problema 2* é feita com recurso à calculadora gráfica, a partir da aplicação *Inequality Graphing* do modelo TI-84 Plus Silver Edition da Texas Instruments.

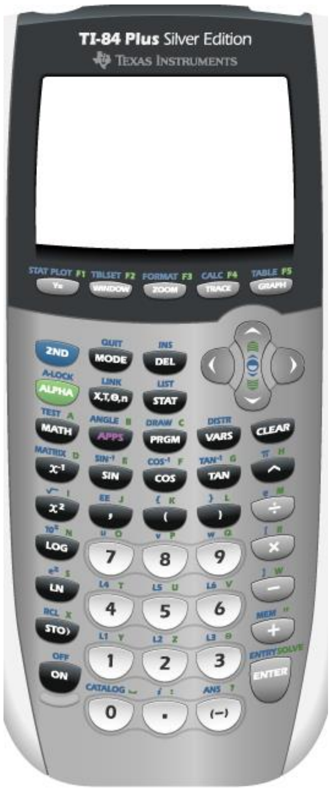


Figura 2.4.1-TI-84 Plus Silver Edition da Texas Instruments

A escolha deste modelo deve-se ao facto de ser um dos mais recentes e integrar o conjunto de calculadoras permitidas pelo Instituto de Avaliação Educativa (IAVE) em situações de avaliação externa.

A aplicação *Inequality Graphing* permite representar graficamente equações e inequações e sombrear regiões de união ou intersecção entre elas. As potencialidades da calculadora gráfica permitem ainda marcar os pontos de intersecção entre condições no plano e determinar as suas coordenadas.

Para aceder ao menu que lista as aplicações instaladas na calculadora, premir a tecla ***APPS*** e seleccionar a opção *Inequalz*.

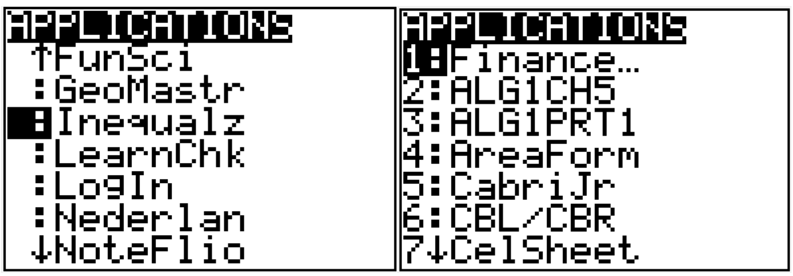


Figura 2.4.2-Aplicação *Inequality Graphing*

O passo seguinte consiste em introduzir as restrições (funcionais e de não negatividade) do problema no *Editor de funções*. Depois de premir a tecla ***Y=***, aparece no ecrã:

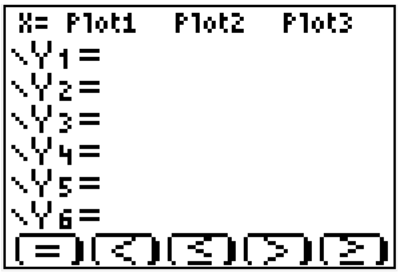


Figura 2.4.3- *Editor de funções*

Por exemplo, a restrição $30x + 75y \geq 300$ é introduzida na sua forma equivalente $y \geq -\frac{2}{5}x + 4$. Para alterar o sinal $=$ para $\geq$ deve escolher-se esta opção no canto inferior do ecrã que se encontra na tecla ***F5*** (Premir a tecla ***ALPHA*** seguida da tecla ***GRAPH***).

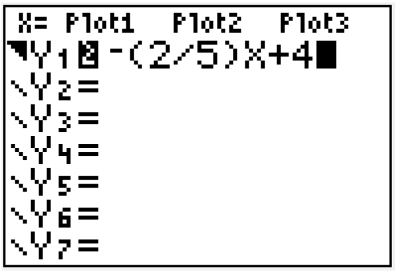


Figura 2.4.4- Introdução das restrições no *Editor de funções*

Da mesma forma para as outras duas restrições funcionais, ambas escritas nas suas formas equivalentes, $5x + y \geq 15 \Leftrightarrow y \geq -5x + 15$ e $x + y \geq 7 \Leftrightarrow y \geq -x + 7$.

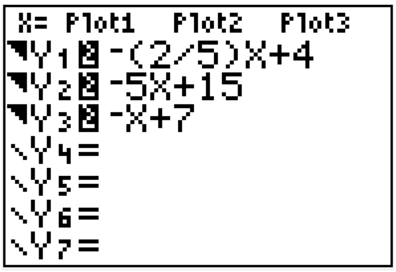


Figura 2.4.5- Introdução das restrições no *Editor de funções*

A restrição $0 \leq y \leq 15$ deve ser escrita na sua forma equivalente $y \geq 0 \wedge y \leq 15$ para que as condições $y \geq 0$ e $y \leq 15$ possam ser introduzidas separadamente, isto é,

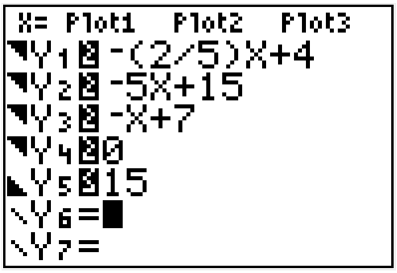


Figura 2.4.6 - Introdução das restrições no *Editor de funções*

A restrição $0 \leq x \leq 10$ é tratada de forma diferente das anteriores pois é uma condição na variável x. Para a inserir na calculadora deve aceder-se ao editor *X*= no canto superior esquerdo da janela de visualização.

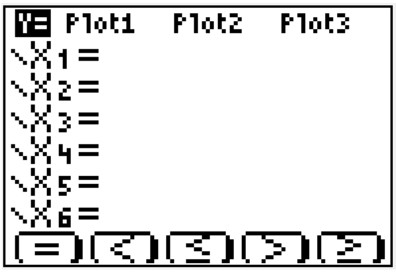


Figura 2.4.7 - Editor *X*=

Esta restrição $0 \leq x \leq 10$ que é equivalente a $x \geq 0 \wedge x \leq 10$ é introduzida neste editor como mostra a figura 2.4.8.

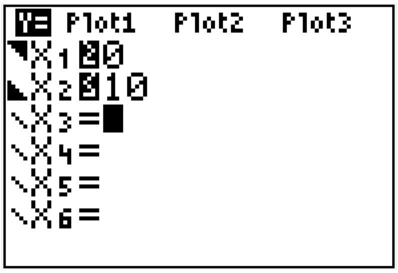


Figura 2.4.8 - Introdução das restrições no *Editor de funções*

O passo seguinte consiste em obter a representação gráfica na região admissível. Para tal, deve, em primeiro lugar, definir-se a *Janela de visualização* adequada à representação que se quer visualizar. Caso contrário pode não ser possível a visualização da mesma.

Para configurar a *Janela de visualização*, premir a tecla ***WINDOW***.

Para o problema em estudo, tendo em conta as duas restrições de não negatividade devem alterar-se as definições de *Xmin* e *Ymin* para -5 e, tendo em conta as restrições funcionais, de *Xmax* e *Ymax* para 20.

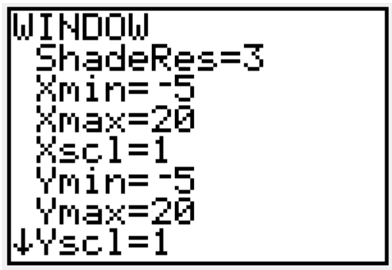


Figura 2.4.9 – Configuração da *Janela de visualização*

Os valores indicados foram escolhidos de modo a ser possível detetar todos os extremos da região admissível e devem ser verificados e/ou alterados sempre que seja necessário visualizar uma representação gráfica.

Após este procedimento, a tecla ***GRAPH*** permite a visualização das restrições introduzidas na calculadora.

A aplicação mostra a representação gráfica das restrições introduzidas na calculadora sem nenhuma relação entre elas.

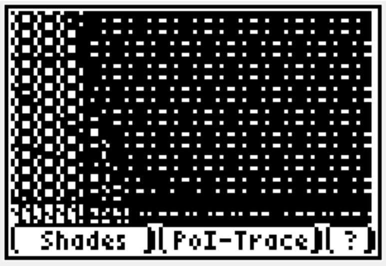


Figura 2.4.10 – Representação gráfica das restrições

Uma vez que se pretende a região de interseção das restrições, deve selecionar-se o comando *Shades* que aparece no ecrã (Premir a tecla ***ALPHA***” seguida da tecla ***F1***) seguida da opção *1:Ineq Intersection*.

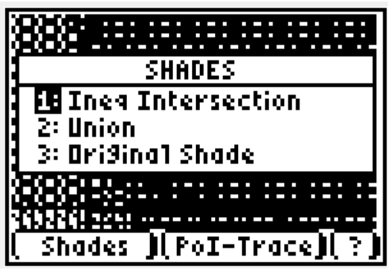


Figura 2.4.11 - Representação gráfica da região admissível

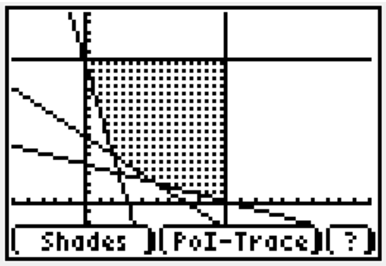


Figura 2.4.12 - Representação gráfica da região admissível

A opção *PoI-Trace* (tecla ***ALPHA*** seguida da tecla ***F3***) permite determinar os *Pontos de interesse* da região que a calculadora considera como sendo os pontos de interseção entre as retas representadas. Desses pontos interessam apenas os vértices da região admissível. Orientando o cursor obtêm-se as coordenadas dos cinco vértices da região admissível. Para cada um dos pontos a tecla ***STO>***, no canto inferior esquerdo da calculadora permite armazenar as coordenadas numa lista.

Nota: A determinação da solução ótima com recurso à calculadora gráfica é feita pelo **Processo 2** já enunciado anteriormente neste trabalho e que consiste em determinar as coordenadas dos vértices da região admissível e do valor da função objetivo em cada um deles.

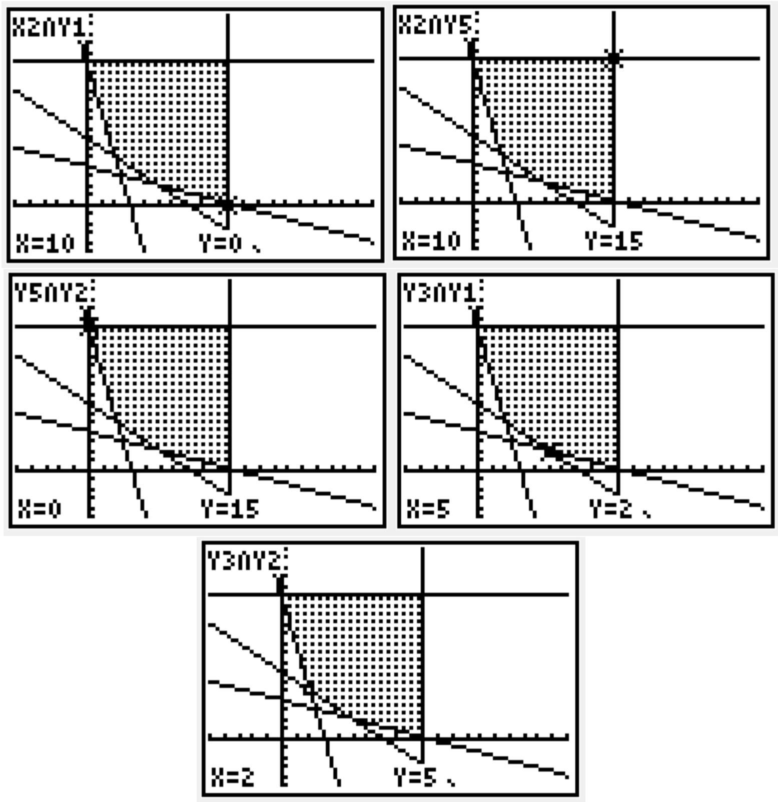


Figura 2.4.13 – Determinação dos vértices da região admissível

Para aceder à lista onde se encontram armazenadas as coordenadas dos vértices da região admissível deve premir-se a tecla ***STAT*** seguida da opção *EDIT*.

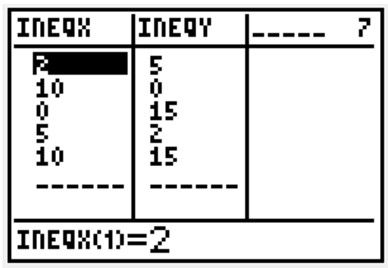


Figura 2.4.14 – Coordenadas dos vértices da região admissível

Na terceira coluna desta tabela pode criar-se uma lista onde se calculam os valores da função objetivo para cada vértice, seguindo o seguinte procedimento:

1.º-Atribuir um nome à lista (CUSTO, por exemplo);

2.º-Introduzir a expressão da função objetivo $(5x+2{,}5y)$ na forma 5****INEQX***+2.5****INEQY***.

Nota: ***INEQX*** e ***INEQY*** devem remeter para as listas anteriores pelo que essas variáveis devem ser selecionadas no conjunto de listas da calculadora, (tecla ***2nd*** seguida da tecla ***STAT***) para as introduzir na expressão do custo.

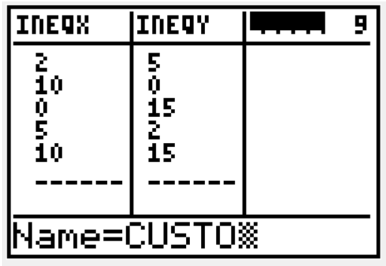


Figura 2.4.15 – Cálculo do valor da função objetivo para cada vértice

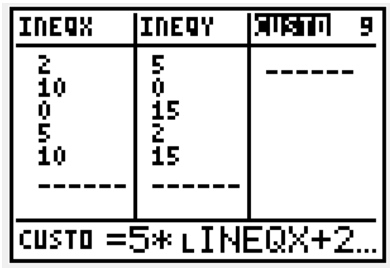


Figura 2.4.16 - Cálculo do valor da função objetivo para cada vértice

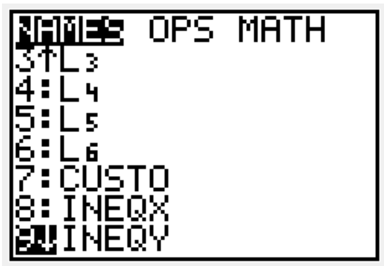


Figura 2.4.17 - Cálculo do valor da função objetivo para cada vértice

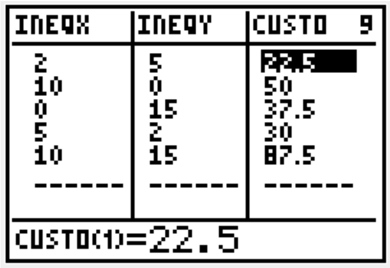


Figura 2.4.18 - Cálculo do valor da função objetivo para cada vértice

Pela análise dos valores do custo pode concluir-se que a função objetivo toma o valor mínimo no ponto de coordenadas $(2,5)$, único ponto em que tem o valor $22{,}5$. Logo, o suplemento diário dado a cada animal deve conter 2 quilogramas de granulado e 5 quilogramas de farinha se a empresa pretende gastar o menos possível ($22{,}5$ euros).

O comando SOLVER do Microsoft Excel

Uma ferramenta disponível e acessível nas escolas é o comando *Solver* do Microsoft Office Excel. A versão explorada neste trabalho é o Microsoft Office Excel 2010.

Antes de o utilizar o *Solver*, é necessário verificar se está visível com o nome ***Solver*** no separador ***Dados*** - grupo ***Análise***.

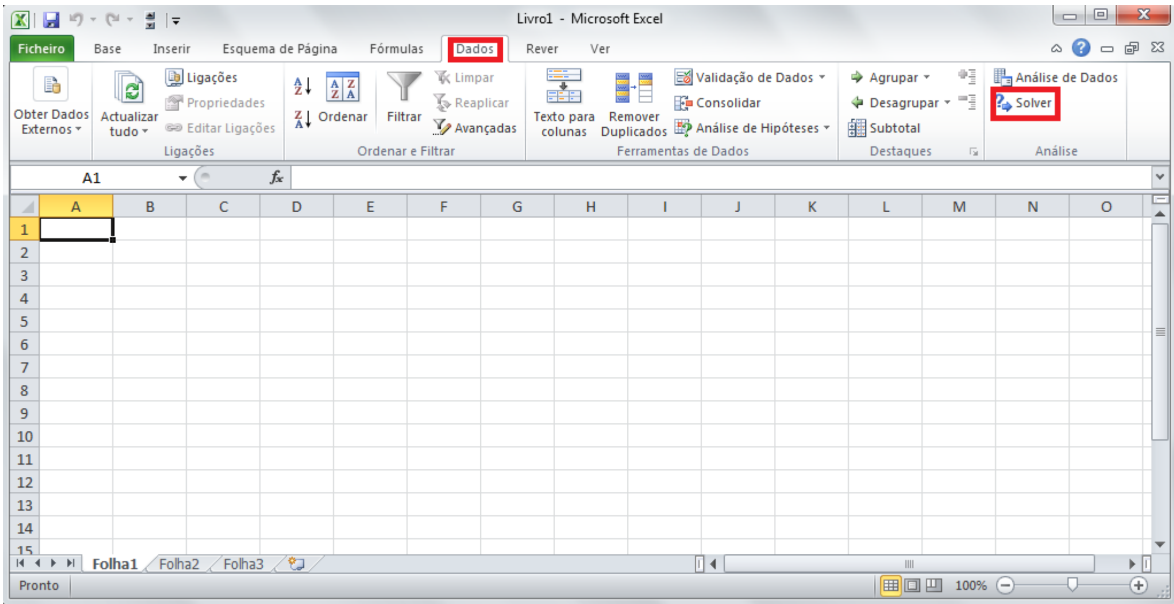


Figura 2.4.19 – Instalação do comando *Solver*

Se não estiver, é necessário proceder à sua instalação da seguinte forma:

1.º- Em ***Personalizar Barra de Ferramentas de Acesso Rápido*** selecionar a opção ***Mais Comandos***.

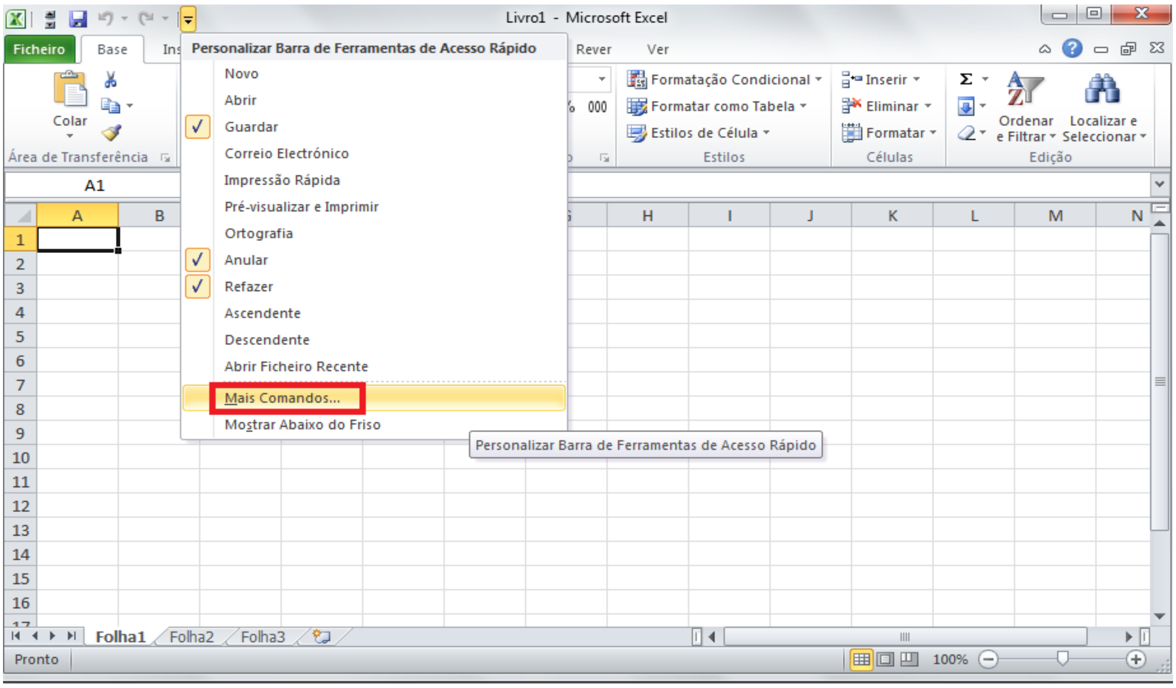


Figura 2.4.20 - Instalação do comando *Solver*

2.º- Na Janela opções do Excel selecionar a opção ***Suplementos*** seguida de ***Ir***.

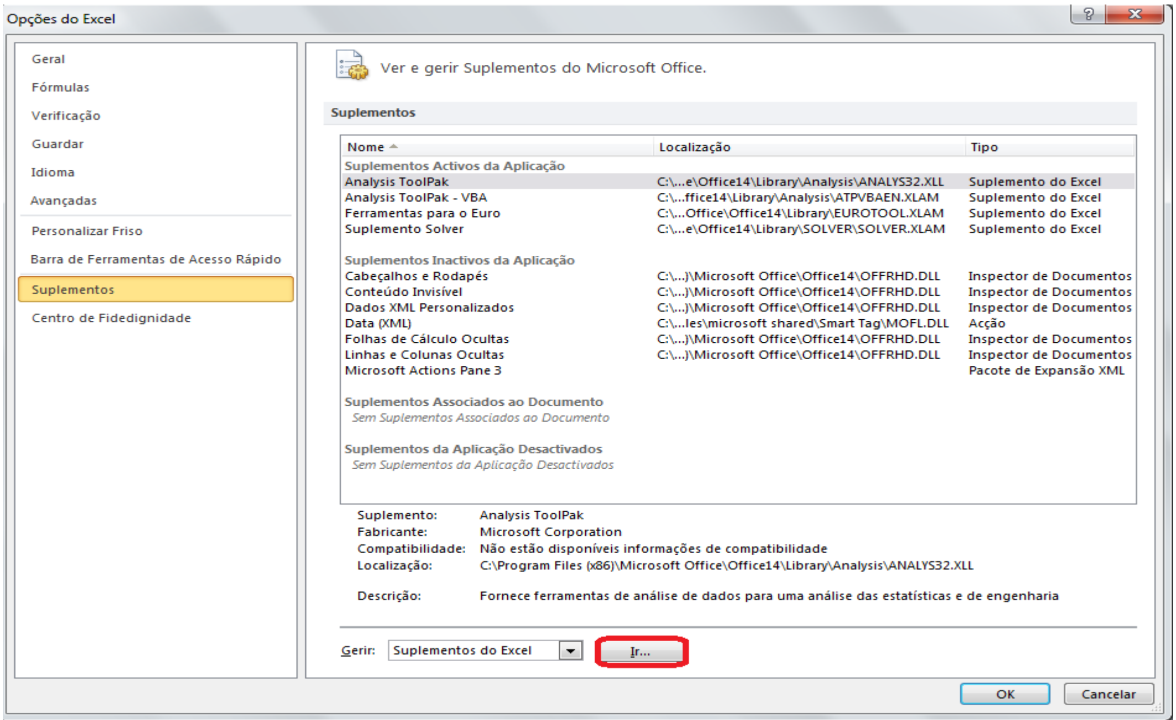


Figura 2.4.21 - Instalação do comando *Solver*

3.º- Na janela ***Suplementos*** selecionar a opção ***Suplemento Solver*** seguida de ***Ok***.

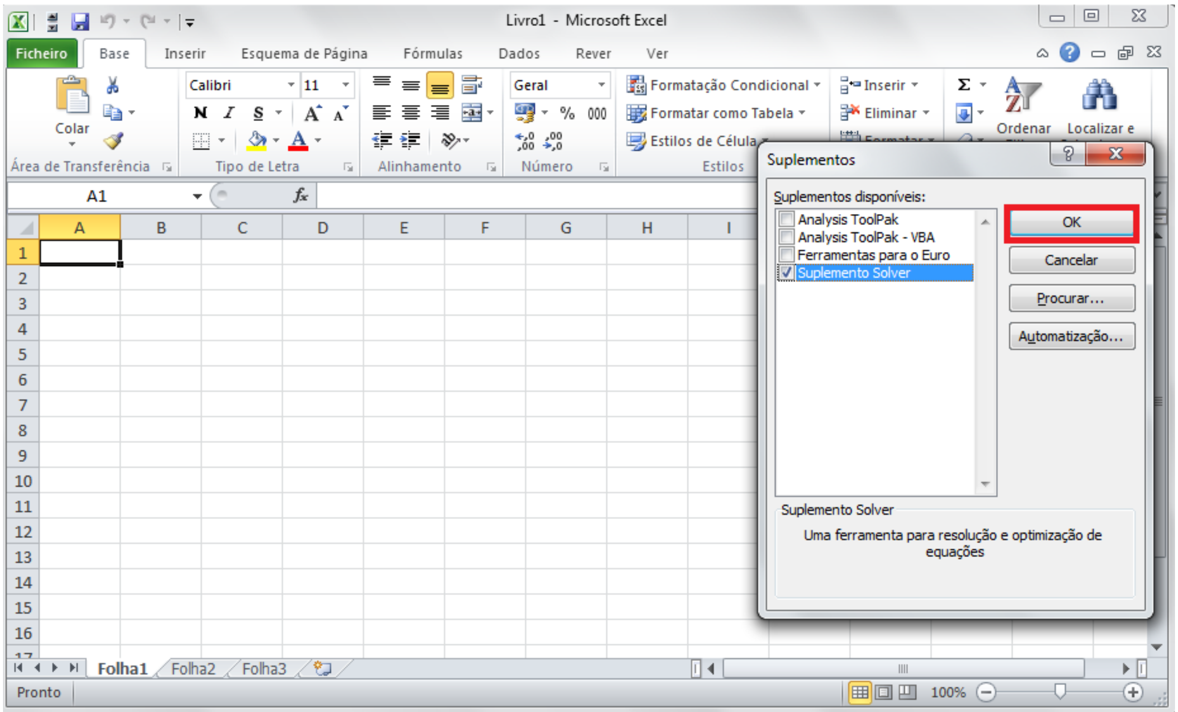


Figura 2.4.22 - Instalação do comando *Solver*

A resolução do *Problema 2* com o *Solver* inicia-se com a criação de uma folha de cálculo onde é introduzida a informação do modelo e na qual devem estar indicados os coeficientes das variáveis na função objetivo, os coeficientes das variáveis nas restrições e os valores do termo independente das restrições (lado direito).

Sejam x e y a quantidade (em quilogramas) de granulado e farinha que o suplemento diário de um animal adulto deve conter. Queremos:

Minimizar

$$Z = 5x + 2{,}5y$$

s.a:

$$30\,x + 75\,y \geq 300$$

$$75\,x + 15\,y \geq 225$$

$$45\,x + 45\,y \geq 315$$

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 15$$

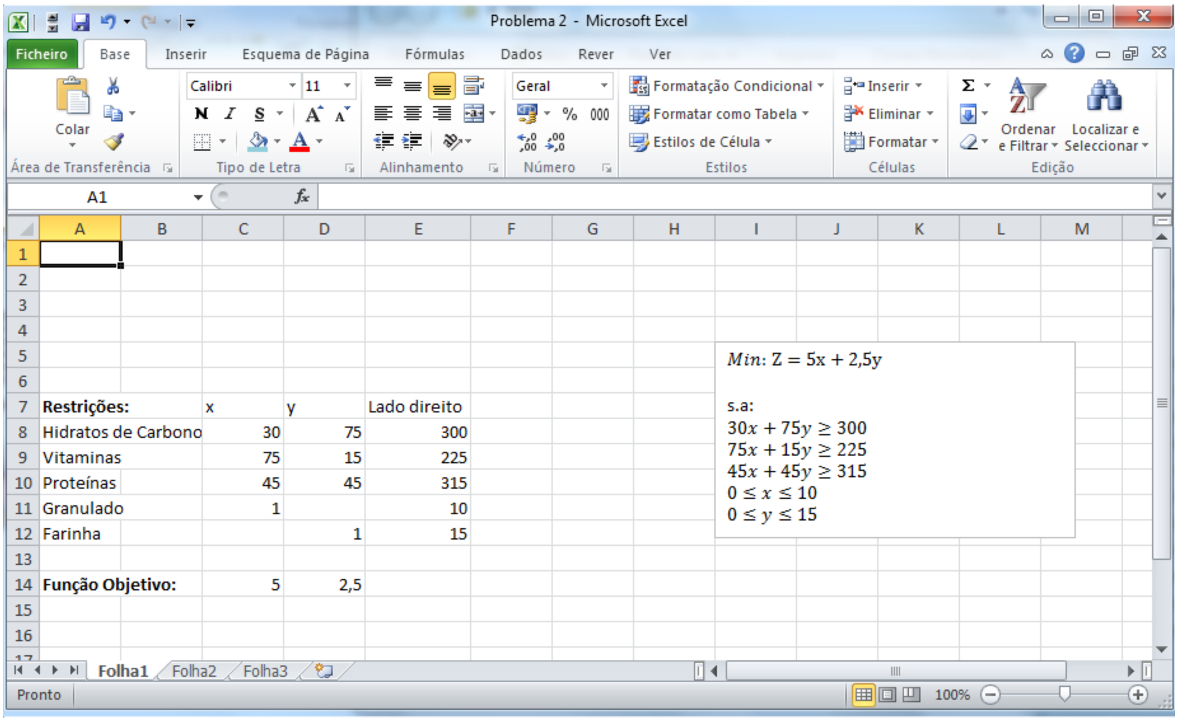


Figura 2.4.23 – Introdução da informação do modelo do Problema 2

Após a introdução dos dados na folha de cálculo devem definir-se as células onde serão colocados os valores das variáveis de decisão, neste caso ***G4*** e ***G5***. Estes valores vão ser alterados consoante o problema.

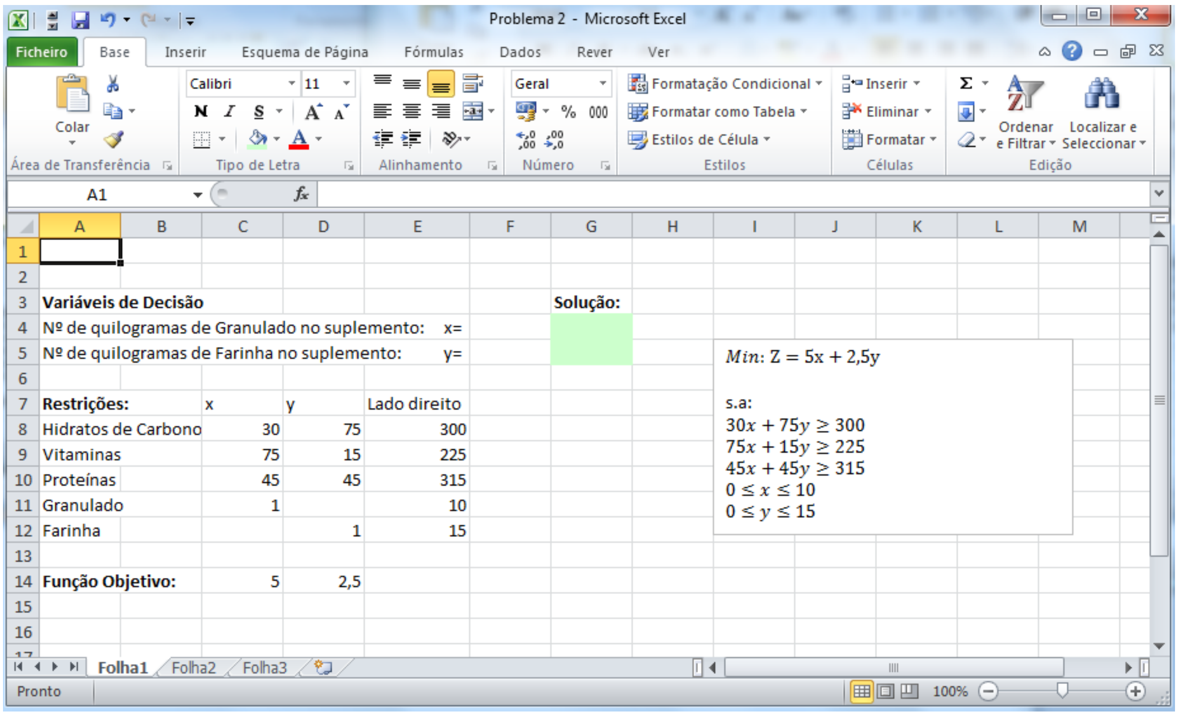


Figura 2.4.24 – Definição das células dos valores das variáveis de decisão

O passo seguinte é a introdução das fórmulas que relacionam os coeficientes das restrições e da função objetivo com as variáveis.

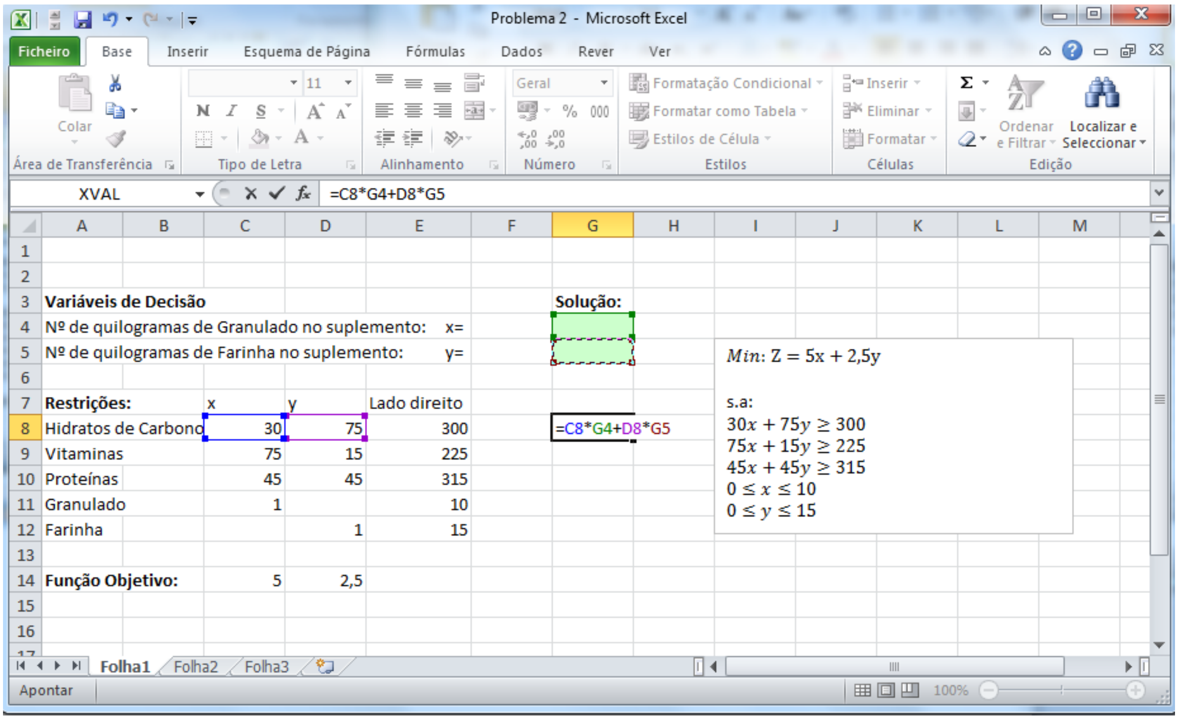


Figura 2.4.25 – Introdução das fórmulas que relacionam os coeficientes das restrições e da função objetivo com as variáveis

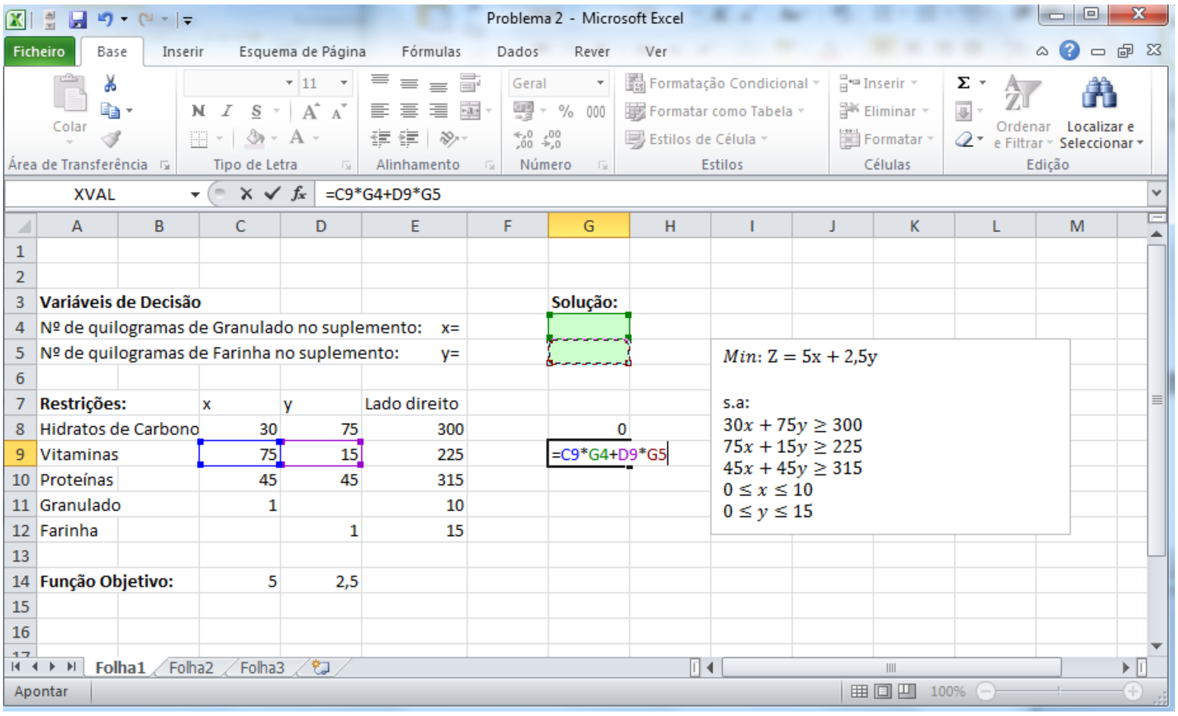


Figura 2.4.26 - Introdução das fórmulas que relacionam os coeficientes das restrições e da função objetivo com as variáveis

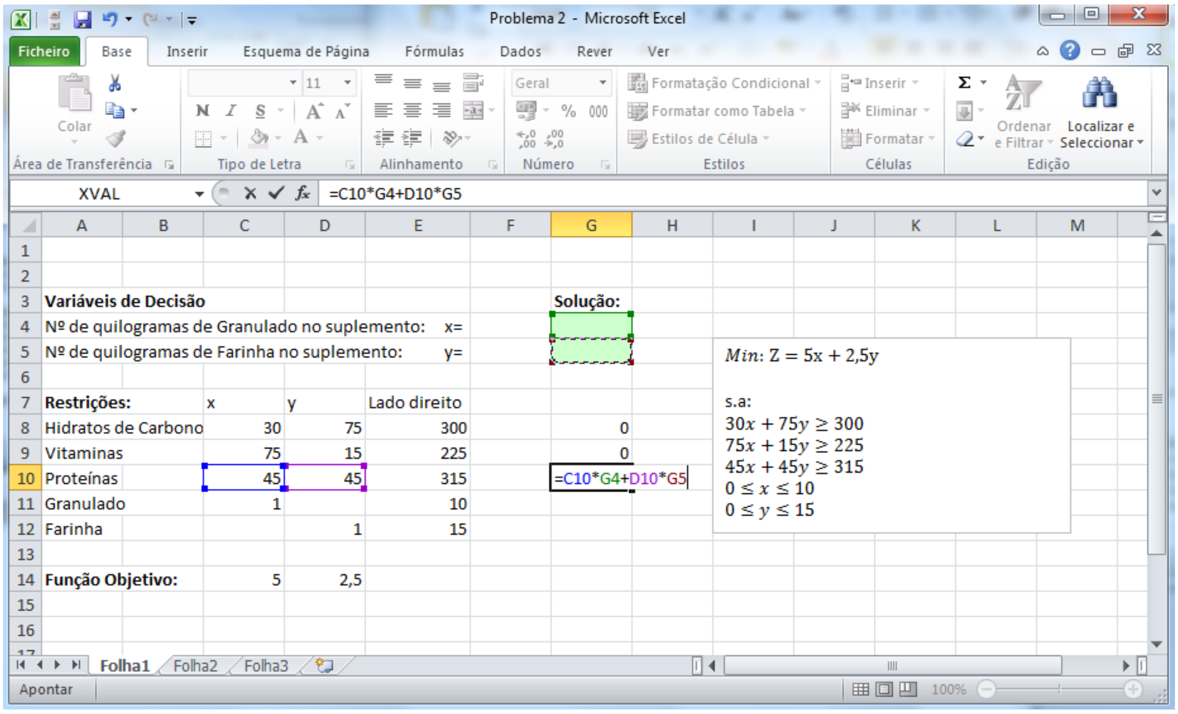


Figura 2.4.27 - Introdução das fórmulas que relacionam os coeficientes das restrições e da função objetivo com as variáveis

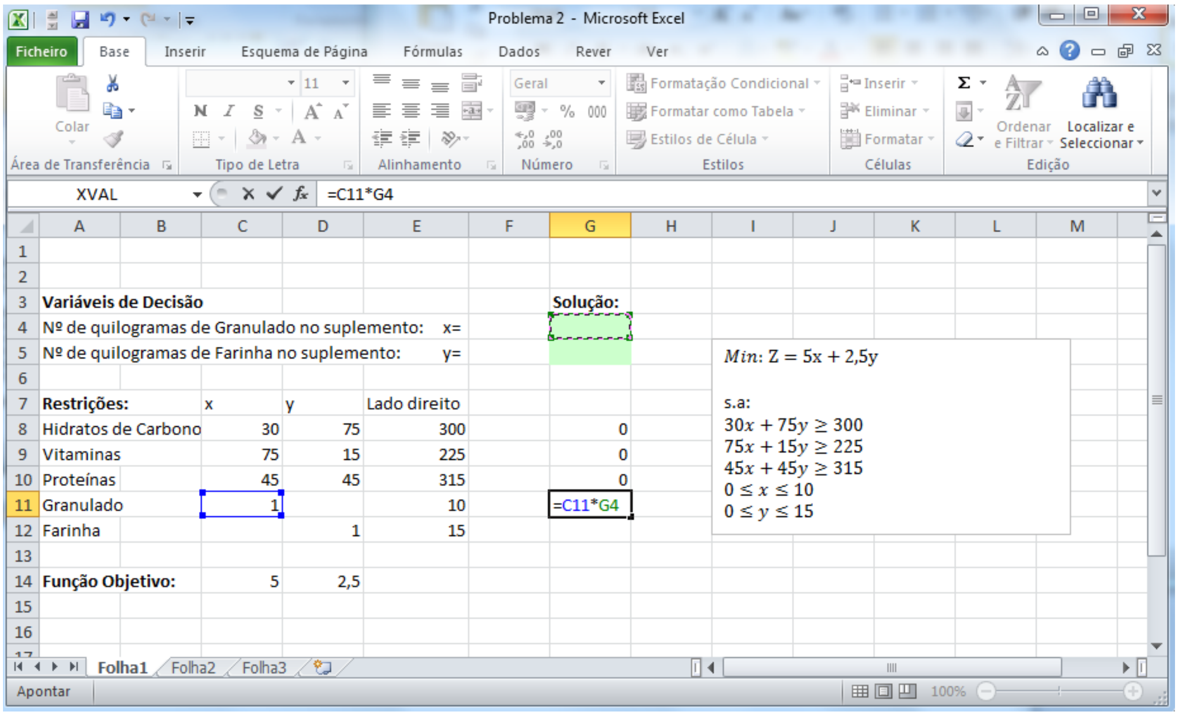


Figura 2.4.28 - Introdução das fórmulas que relacionam os coeficientes das restrições e da função objetivo com as variáveis

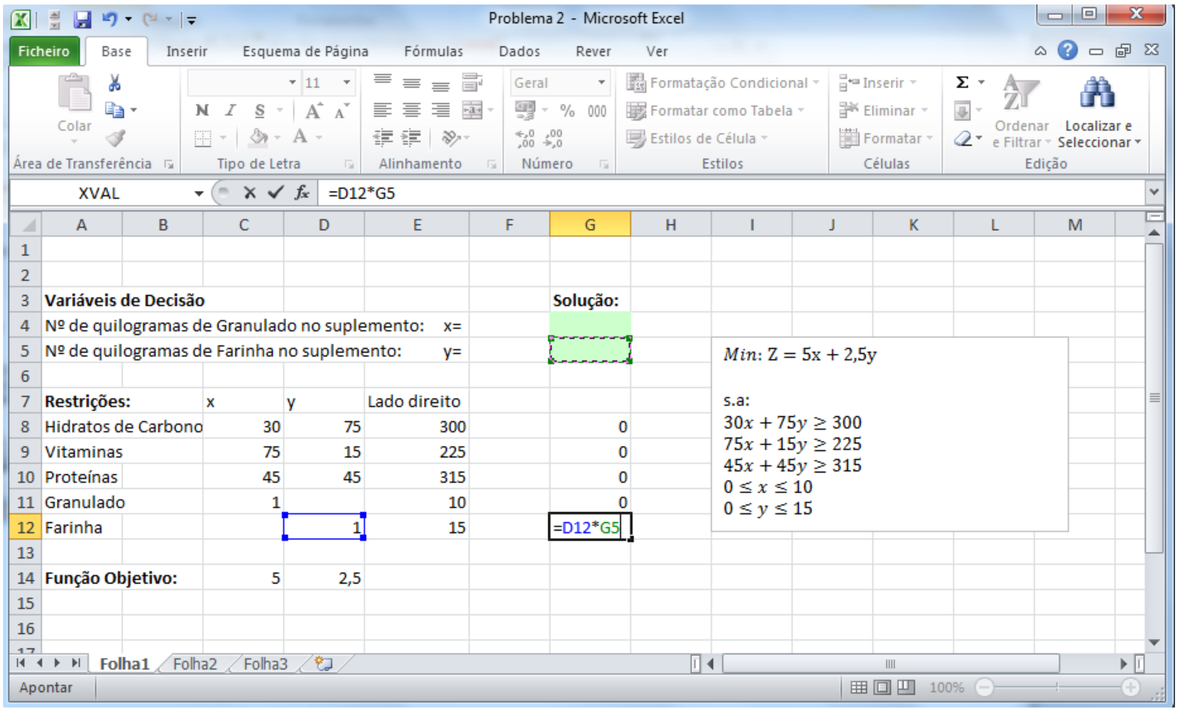


Figura 2.4.29 - Introdução das fórmulas que relacionam os coeficientes das restrições e da função objetivo com as variáveis

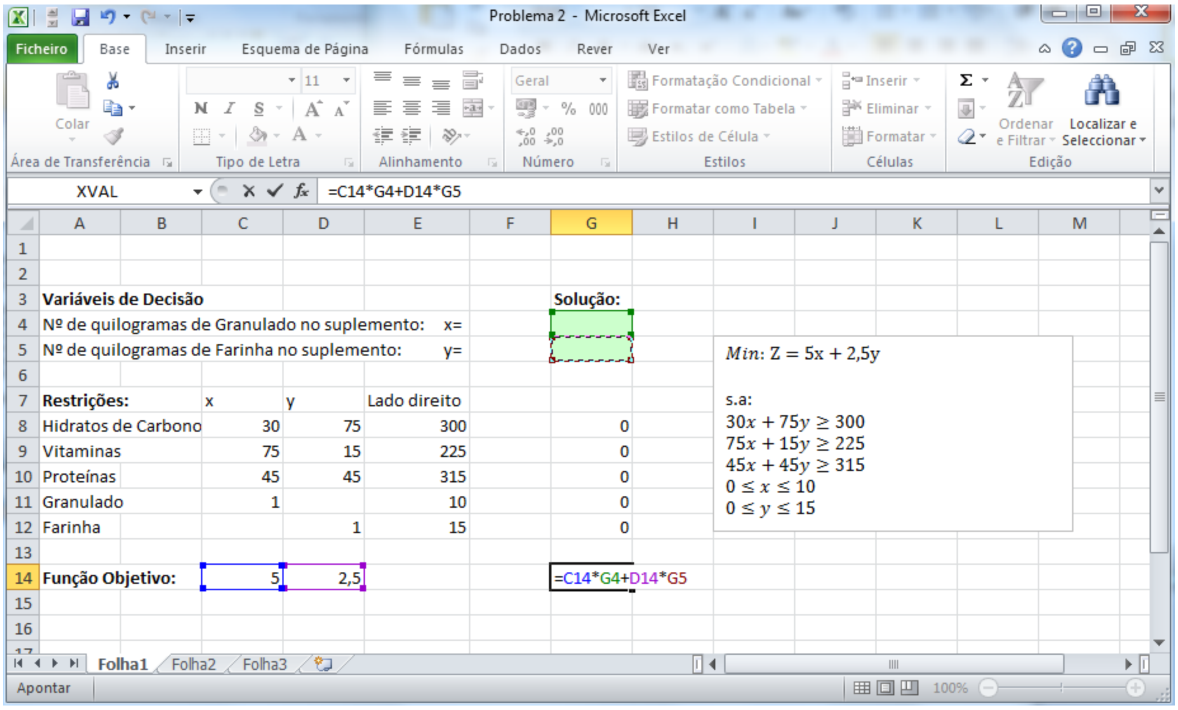


Figura 2.4.30 - Introdução das fórmulas que relacionam os coeficientes das restrições e da função objetivo com as variáveis

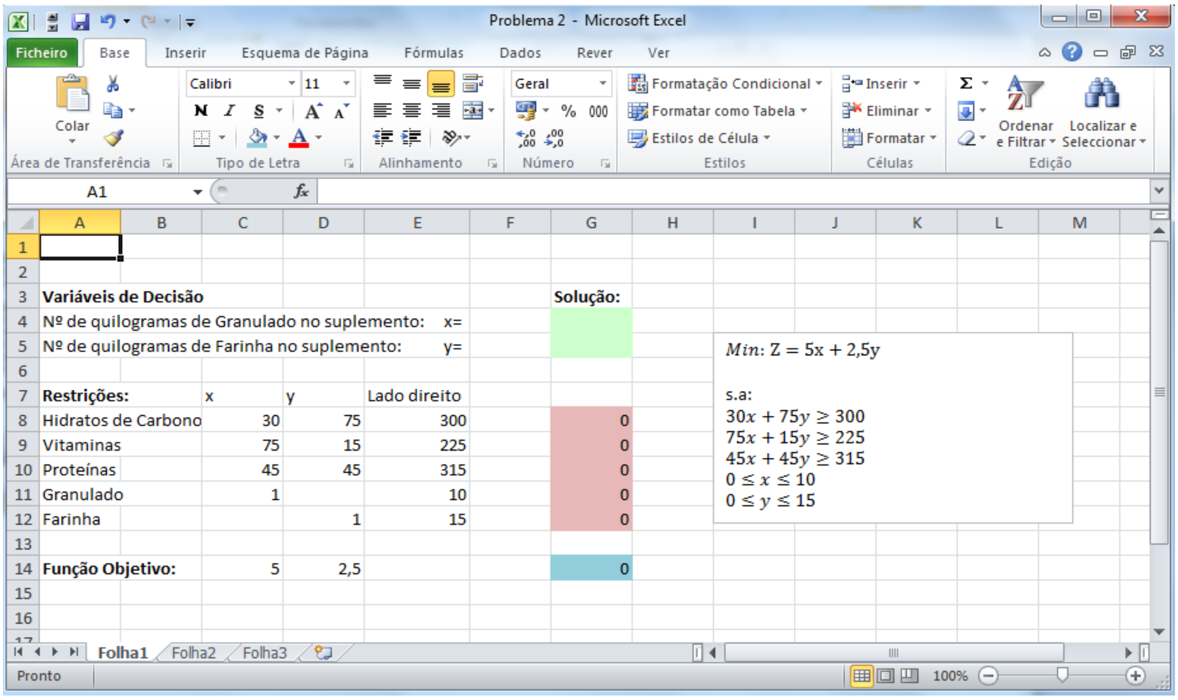


Figura 2.4.31 - Introdução das fórmulas que relacionam os coeficientes das restrições e da função objetivo com as variáveis

Note-se que o Excel assume que as variáveis de decisão tomam o valor zero, uma vez que não foi definido qualquer valor para as células ***G4*** e ***G5***, que correspondem ao valor de x e y, respetivamente. Consequentemente o valor das células **G8**, ***G9***, ***G10***, ***G11***, ***G12*** e ***G14*** são zero. Estes valores vão ser alterados com a alteração dos valores das variáveis.

Para aceder ao *Solver*, selecionar ***Dados*** seguido de ***Análise*** e de ***Solver***. Aparece a seguinte janela:

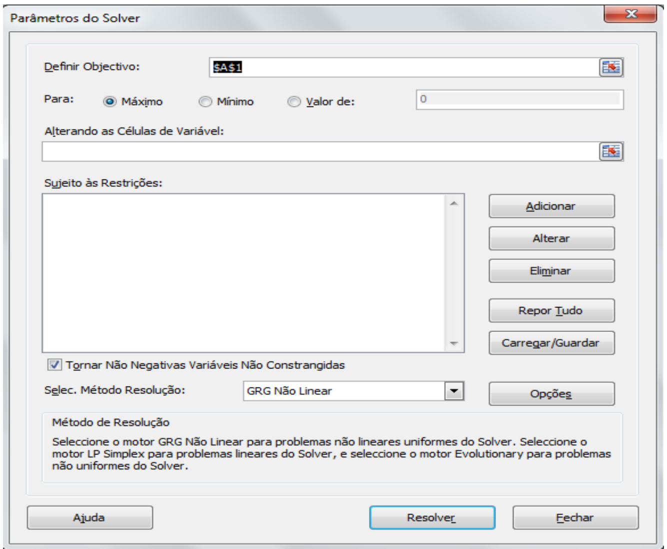


Figura 2.4.32 – Acesso ao comando *Solver*

Para o problema em estudo inserir os seguintes dados:

Em ***Definir Objetivo:***, deve dar-se indicação da célula onde inserimos a função objetivo, ***G14***.

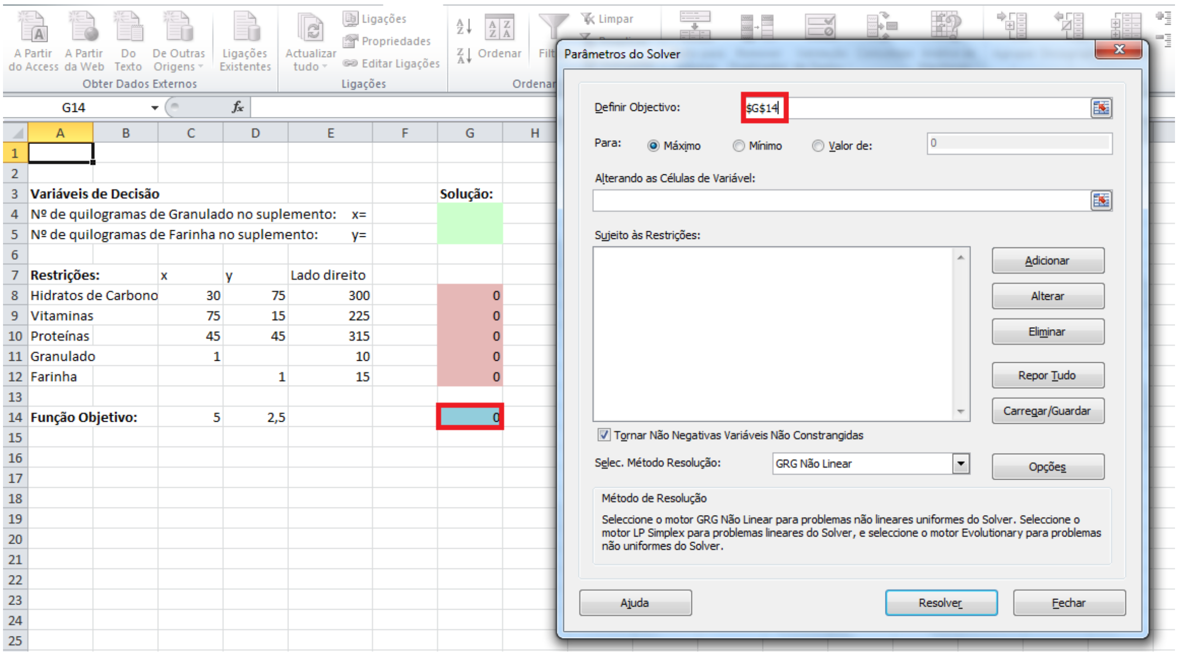


Figura 2.4.33 – Introdução dos parâmetros do *Solver*

Em ***Para:***, por se tratar de um problema de minimização, escolher a opção ***Mínimo***.

Em ***Alterando as Células de Variável:***, indicar as células onde se definiram as variáveis, x e y, neste caso, "***G4***" e "***G5***", respetivamente.

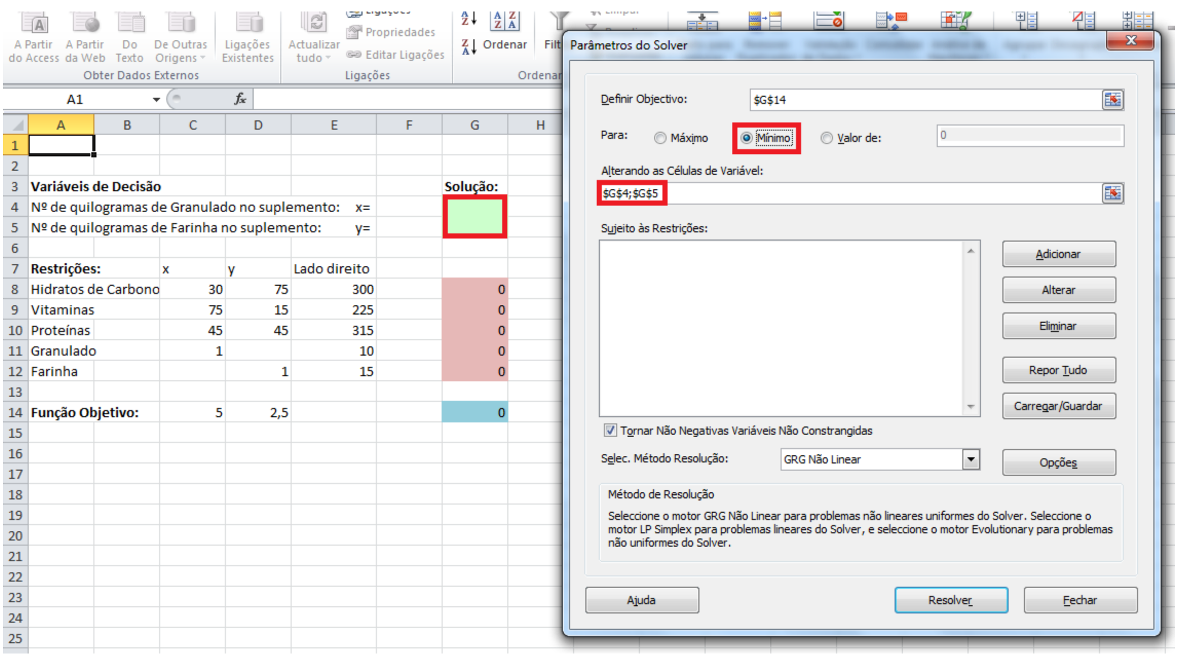


Figura 2.4.34 - Introdução dos parâmetros do *Solver*

Para introduzir as expressões das restrições funcionais e de integralidade (quando necessárias), selecionar ***Adicionar***, que abre a janela ***Adicionar Restrição***. Note-se que as restrições de não negatividade podem ser definidas também neste conjunto de restrições ou, alternativamente, selecionando a opção ***Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas***.

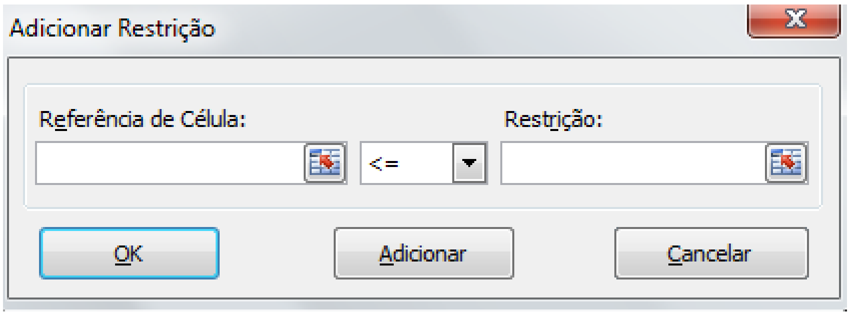


Figura 2.4.35 – Adição das restrições no *Solver*

Para cada restrição, em ***Referência de Célula*** introduzir a localização da célula onde se encontra a fórmula relativa ao lado esquerdo da restrição; em ***Restrição***, a localização da célula com o valor do lado direito da restrição. No menu do meio, seleciona-se o sinal da restrição em causa ($\geq, \leq$ ou $=$). É também neste menu que se pode indicar se as variáveis são inteiras.

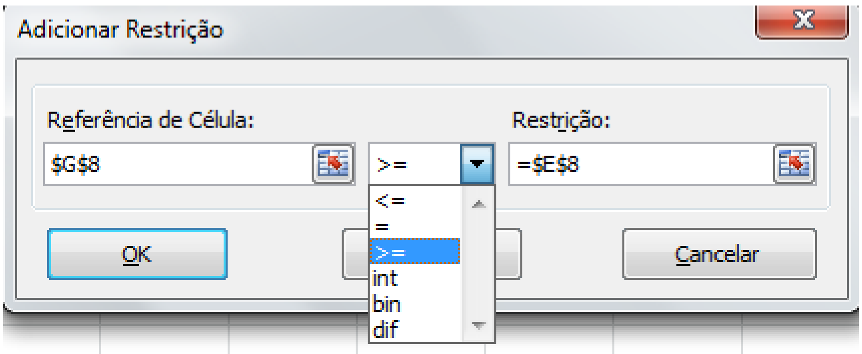


Figura 2.4.36 - Adição das restrições no *Solver*

A opção ***Adicionar*** permite guardar os dados referentes a cada restrição e introduzir a seguinte. A opção ***OK*** permite terminar este processo.

A Janela da figura 2.4.37 mostra toda a informação do modelo.

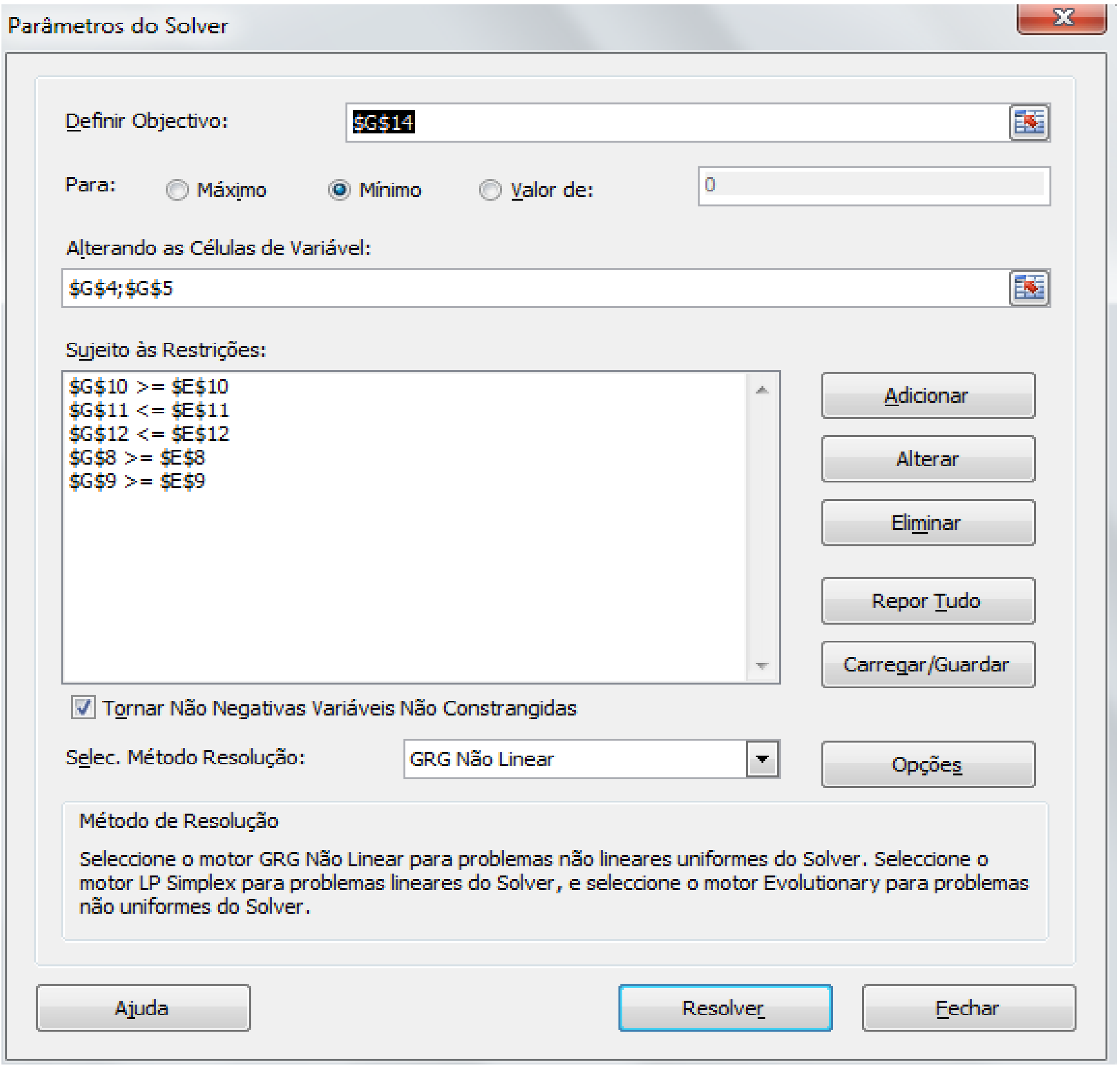


Figura 2.4.37 – Informação do modelo no comando Solver

Deve ainda verificar-se se a opção ***Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas*** está selecionada, uma vez que se pretende que x e y tomem apenas valores não negativos e, por fim, em ***Selec. Método de Resolução:***, selecionar o motor ***LP Simplex***, para resolver problemas lineares.

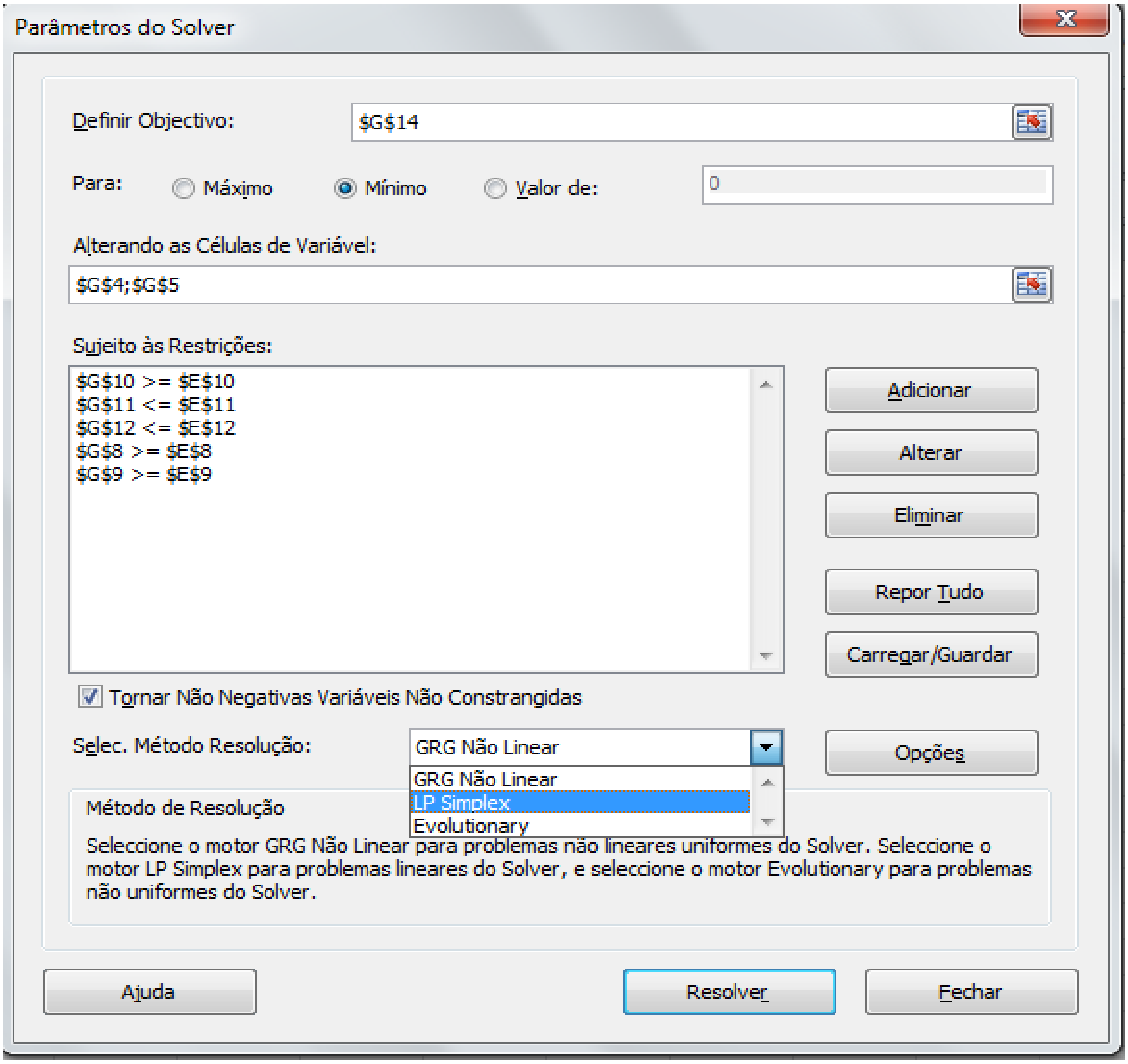


Figura 2.4.38 – Seleção do método de resolução

Para solucionar o problema, premindo o botão ***Resolver***. Se nem o modelo nem as definições na folha de cálculo apresentarem erros o Excel abre a seguinte janela:

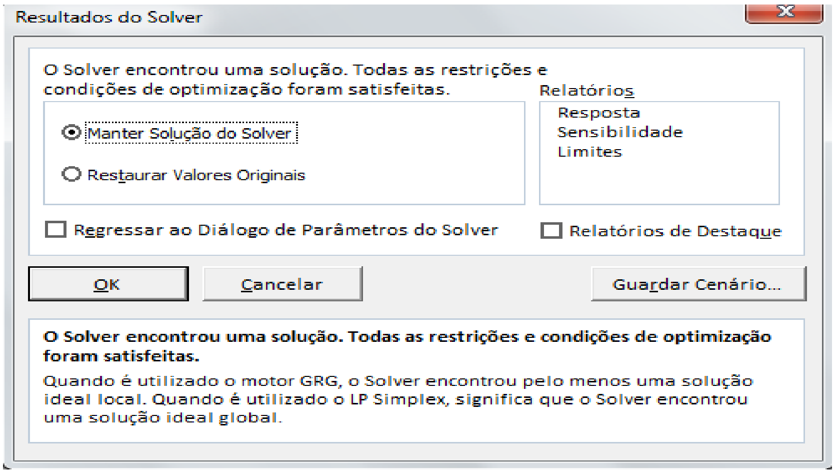


Figura 2.4.39 – Obter os resultados do *Solver*

Pode ler-se na mensagem que surge no cimo da janela que o Solver encontrou uma solução ótima e que todas as restrições e condições de otimização foram satisfeitas.

Além da solução, o Solver gera três relatórios: ***Resposta***, ***Sensibilidade*** e ***Limites***, sendo de particular interesse a análise dos dois primeiros.

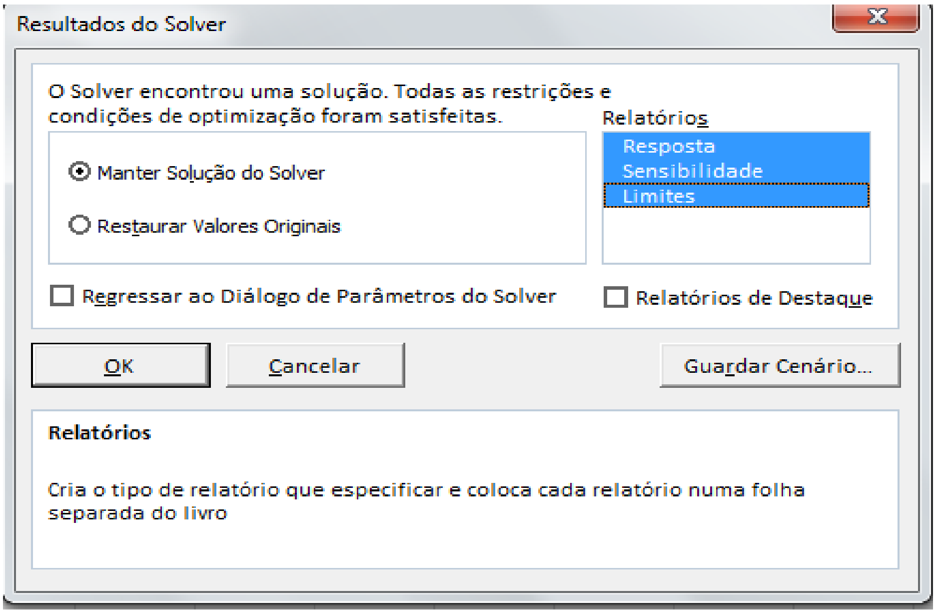


Figura 2.4.40 – Obter os resultados do *Solver*

A solução obtém-se selecionando a opção ***OK***.

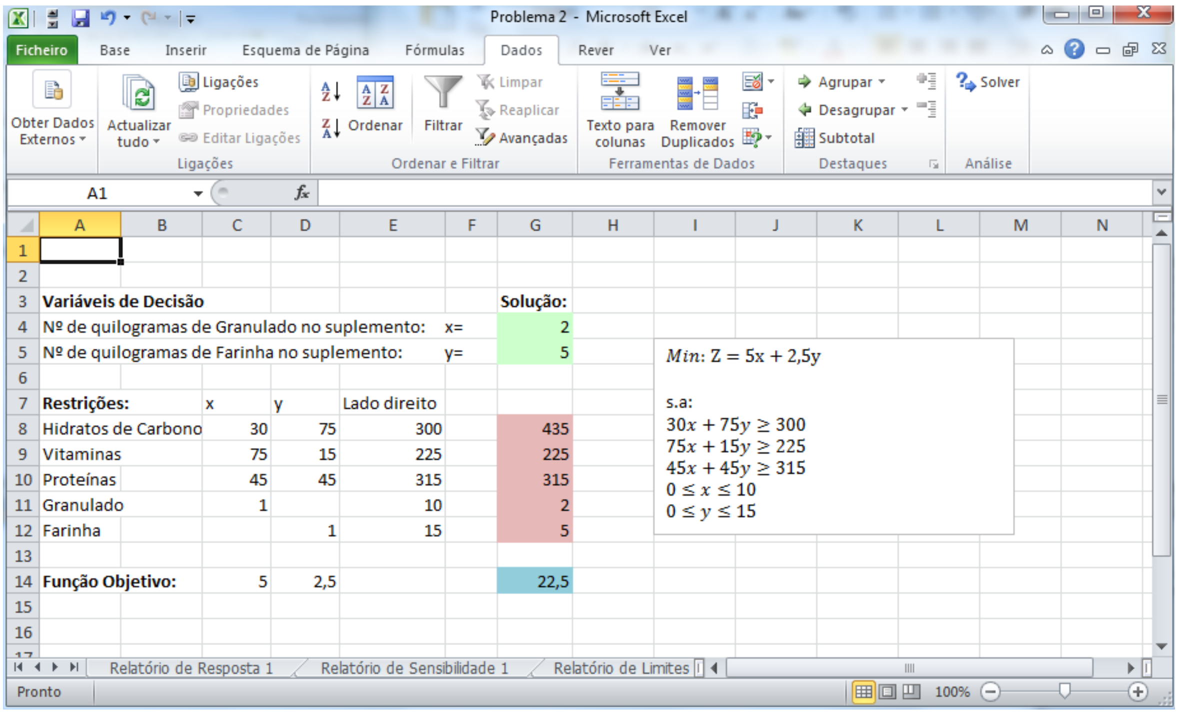


Figura 2.4.41 – Solução do *Problema 2* obtida pelo *Solver*

O **Relatório de Resposta** apresenta a solução ótima de forma detalhada. Note-se que, se se tiver o cuidado de colocar nomes antes das células que contém as variáveis de decisão, das restrições e da função objetivo, estas etiquetas surgem agora no relatório, tornando-o bastante mais legível.

Microsoft Excel 14.0 Relatório de Resposta
Folha de Cálculo: [Problema 2.xlsx]Folha1
Relatório Criado: 21-04-2014 20:47:39
Resultado: O Solver encontrou uma solução. Todas as restrições e condições de optimização foram satisfeitas.
Motor do Solver
Motor: LP Simplex
Tempo de Solução: 0,016 Segundos.
Iterações: 3 Subproblemas: 0
Opções do Solver
Tempo Máximo Ilimitado, Iterações Ilimitado, Precision 0,000001, Utilizar Arredondamento Automático
Máximo de Subproblemas Ilimitado, Máximo de Soluções de Número Inteiro Ilimitado, Tolerância de Número Inteiro 1%, Assumir NãoNegativo

Célula de Objectivo (Mínimo)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
$G$14	Função Objetivo: Solução:	0	22,5

Células de Variável

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número inteiro
$G$4	Nº de quilogramas de Granulado no suplemento: x= Solução:	0	2	Contin
$G$5	Nº de quilogramas de Farinha no suplemento: y= Solução:	0	5	Contin

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Estado	Margem
$G$10	Proteínas Solução:	315	$G$10>=E1C	Enlace	0
$G$11	Granulado Solução:	2	$G$11<=$E$11	Sem Enlace	8
$G$12	Farinha Solução:	5	$G$12<=$E$12	Sem Enlace	10
$G$8	Hidratos de Carbono Solução:	435	$G$8>=$E$8	Sem Enlace	135
$G$9	Vitaminas Solução:	225	$G$9>=$E$9	Enlace	0

Figura 2.4.42 – Relatório de Resposta

Da análise do ***Relatório de Resposta*** pode concluir-se que o valor ótimo da função objetivo é $22{,}5$, ou seja, o custo mínimo do suplemento é de $22{,}5$ euros por dia. A solução ótima (x, y) é $(2, 5)$, ou seja, o suplemento diário dado a cada animal deve conter 2 quilogramas de granulado e 5 quilogramas de farinha. Na tabela ***Restrições*** é apresentada a análise de como as restrições estão a ser satisfeitas. Neste caso, verifica-se que:

– existem duas restrições que atingem o limite no ***Valor da Célula*** o que resulta no valor zero para a ***Margem*** e que correspondem às restrições associadas às vitaminas e às proteínas, ou seja, o suplemento tem exatamente 225 gramas de vitaminas ($75x + 15y = 225$) e 315 gramas de proteínas ($45x + 45y = 315$). Estas são as restrições ativas, isto é, o vértice correspondente à solução ótima encontra-se na interseção das retas correspondentes a estas duas restrições. O custo do suplemento aumenta se a quantidade de vitaminas ou proteínas aumentar.

- a restrição que apresenta uma ***Margem*** de 135 corresponde aos hidratos de carbono. O suplemento devia conter pelo menos 300 gramas de hidratos de carbono e da leitura do relatório tem-se que $30x + 75y = 435$, ou seja, nestas condições, a quantidade de hidratos de carbono no suplemento está acima do que é exigido. Mesmo que fosse utilizada menos quantidade deste aditivo o custo do suplemento manter-se-ia igual.
- relativamente às restrições que se referem à quantidade máxima que o suplemento deve conter de granulado e farinha, verifica-se que apresentam uma ***Margem*** de 8 e 10, respetivamente, ou seja, o suplemento contém 2 dos 10 kg de granulado possíveis e 5 dos 15 kg de farinha possíveis, o que dá uma folga de 8 e 10 kg.

O ***Relatório de Sensibilidade*** apresenta um estudo da sensibilidade da solução ótima se as constantes do problema sofrerem alguma alteração nomeadamente os coeficientes da função objetivo e os valores dos lados dos direitos das restrições.

Microsoft Excel 14.0 Relatório de Sensibilidade
Folha de Cálculo: [Problema 2.xlsx]Folha1
Relatório Criado: 21-04-2014 20:47:39

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
$G$4	Nº de quilogramas de Granulado no suplemento: x= Solução:	2	0	5	7,5	2,5
$G$5	Nº de quilogramas de Farinha no suplemento: y= Solução:	5	0	2,5	2,5	1,5

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
$G$10	Proteínas Solução:	315	0,041666667	315	360	70,43478261
$G$11	Granulado Solução:	2	0	10	1E+30	8
$G$12	Farinha Solução:	5	0	15	1E+30	10
$G$8	Hidratos de Carbono Solução:	435	0	300	135	1E+30
$G$9	Vitaminas Solução:	225	0,041666667	225	180	120

Figura 2.4.43 – Relatório de Sensibilidade

Este relatório apresenta duas tabelas.

Na tabela ***Células de Variável***, é apresentada a análise de sensibilidade aos coeficientes da função objetivo, sendo de interesse a interpretação dos valores que constam nas colunas ***Permissível Aumentar*** e ***Permissível Diminuir*** que indicam a variação dos valores dos coeficientes da função objetivo permitida sem que haja alteração da solução ótima. É evidente que ao alterar um coeficiente na função objetivo o valor desta se altera, mesmo mantendo o valor das variáveis. Mas o que se está aqui a analisar é, como se pode variar a inclinação da função objetivo sem que a solução ótima “mude de vértice”. Neste caso, em relação à variável x o coeficiente (custo de um quilograma de granulado) pode aumentar 7,5 euros ou diminuir 2,5 euros, sem que a solução ótima se altere. Em relação ao coeficiente da variável y (custo de um quilograma de farinha), se ele aumentar 2,5 euros ou diminuir 1,5 euros a solução ótima não se altera.

Na tabela ***Restrições*** é feita uma análise de sensibilidade ao valor do lado direito das restrições. Ao alterar um destes valores estamos a alterar uma restrição e consequentemente a região admissível do problema. Isso poderá ter como consequência que a solução ótima deixe de estar num determinado vértice da região admissível e mude para outro. Os valores dados nas colunas ***Permissível Aumentar*** e ***Permissível Diminuir*** são os valores que se podem somar e subtrair ao valor inicial (coluna “Restrição Lado Direito”), sem que a solução ótima mude de vértice. Note-se que se a essa restrição contiver o vértice ótimo então, mesmo sem mudar de vértice, a solução ótima, e consequentemente o seu valor ótimo, alteram-se. O ***Preço Sombra*** informa qual a variação no custo por cada unidade de cada nutriente (quantidade de hidratos de carbono, vitaminas e proteínas) que se possa pretender obter adicionalmente. Neste caso, por exemplo, na linha referente às proteínas, verifica-se que, por cada grama adicional de proteínas que se pretenda obter por utilização dos suplementos além dos 315 gramas atuais, o custo do suplemento aumenta aproximadamente 0,04. Note-se que no caso dos hidratos de carbono este valor é zero. De facto, esta restrição não era ativa na solução ótima. Não se obteve apenas 300 gramas de hidratos de carbono mas sim 435. Como tal, aumentar a exigência de 300 gramas para 301 não vai implicar qualquer alteração no custo da solução.

2.5 Problemas propostos

Problema proposto 1

Uma empresa de produtos agrícolas vende azeite no mercado interno e no mercado externo. Relativamente ao ano de 2014, admita que:

• a empresa poderá vender, no total, até 6 mil toneladas de azeite;

• a quantidade de azeite a vender pela empresa no mercado externo não poderá ultrapassar 3 mil toneladas;

• a empresa terá uma despesa de 2000 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado interno e uma despesa de 4000 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado externo;

• a despesa total da empresa com a venda do azeite não poderá exceder 16 000 euros.

Admita ainda que, no ano de 2014, a empresa obterá um lucro de 500 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado interno e um lucro de 600 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado externo.

Designe por x a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, a vender no mercado interno e por y a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, a vender no mercado externo, no ano de 2014.

Determine a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado interno e a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado externo, no ano de 2014, de modo que, nas condições referidas, o lucro da empresa, nesse ano, seja máximo.

Exame de Matemática B, 1.ªfase, 2013 (adaptado)

Problema proposto 2

Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia elétrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: energia de origem convencional, maioritariamente resultante da combustão de fuel, ou, em alternativa, energia eólica.

Para uma cobertura razoável de iluminação, no período noturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a 40MWh.

Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida.

Relativamente à energia de origem convencional, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 80 euros.

Relativamente à energia eólica, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 90 euros;
- o fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os 40 MWh.

Represente por x a quantidade de energia de origem convencional e por y a quantidade de energia eólica consumidas pela autarquia.

Determine que quantidade de energia de cada tipo deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas.

Exame de Matemática B, 1.ªfase, 2007 (adaptado)

Problema proposto 3

A turma da Isabel decidiu fazer arranjos florais, utilizando flores do horto da escola, para vender no Dia dos Namorados.

Idealizaram arranjos formados por margaridas, rosas e violetas.

Dispõem de: 192 margaridas, 88 rosas e 113 violetas.

Pensaram formar dois tipos de arranjos: A e B.

Cada arranjo do tipo A:

- será composto por 16 margaridas, 4 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 3 euros.

Cada arranjo do tipo B:

- será composto por 8 margaridas, 8 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 2 euros.

Determine o número de arranjos de cada tipo que os alunos devem produzir, para obterem o maior lucro possível (admitindo que vendem todos os arranjos).

Exame de Matemática B, 1.ªfase, 2006 (adaptado)

2.6 Soluções dos problemas propostos

Problema proposto 1

Para obter o lucro máximo deverão ser vendidas 4 mil toneladas de azeite no mercado interno e 2 mil no mercado externo.

Problema proposto 2

Para minimizar os custos devem ser consumidos 20 MWh de energia convencional e 20 MWh de energia eólica.

Problema proposto 3

Para obter o maior lucro possível a turma da Isabel tem duas opções: fazer 9 arranjos do tipo A e 5 arranjos do tipo B ou fazer 11 arranjos do tipo A e 2 do tipo B.

Capítulo III

Modelos de Grafos

3.1 Breve síntese histórica

A origem da Teoria dos Grafos, é em geral, associada a um problema, muito conhecido do século XVIII, o Problema das Sete Pontes de *Königsberg* (antiga capital da Prússia Oriental e atualmente cidade da Rússia com o nome de Kaliningrado). Parte desta cidade localizava-se em duas ilhas do rio Pregel ligadas entre si por uma ponte e às margens por outras seis pontes, como ilustra a figura 3.1.1.

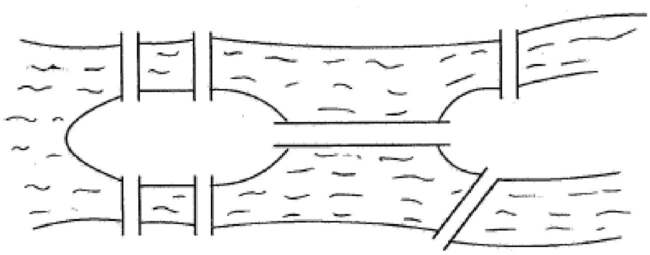


Figura 3.1.1 – Esquema do Problema das Pontes de Königsberg

Consta que, nos seus passeios, os habitantes de *Königsberg* se divertiam a tentar encontrar um percurso que lhes permitisse atravessar todas as pontes uma, e uma só vez, voltando ao ponto de partida. Nunca ninguém o conseguiu e acreditava-se que tal não era possível. Este problema chegou até Leonard Euler (1707-1783), um matemático suíço, que se interessou pelo problema resolvendo-o e mais importante que isso, generalizando-o.

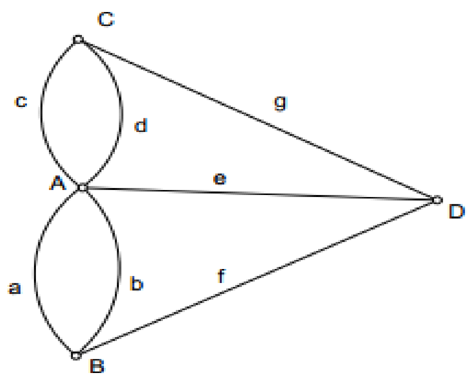


Figura 3.1.2 – Grafo representativo do Problema das Pontes de Königsberg

Para resolver este problema, aparentemente simples, Euler considerou 4 pontos (dois pontos representando as margens e outros dois representando as ilhas) e 7 linhas (representando as pontes), obtendo o diagrama da figura 3.1.2.

Os esquemas do tipo do representado na figura 3.1.2 constituem representações gráficas de **Grafos**.

Muitas vezes, para resolver uma determinada situação problemática, há tendência a fazer um esquema, ou um modelo, que facilite a organização das ideias. Com base nesses modelos, consegue-se visualizar mais facilmente a forma de determinar a melhor solução para o problema ou definir uma estratégia para o resolver.

Em muitas situações o tipo de modelos utilizados são grafos, que não são mais do que esquemas onde se utilizam pontos ligados por linhas conforme a relação que é estabelecida no problema.

Em 1736 Euler escreve um artigo, no qual demonstra a inexistência de um percurso nas condições anteriormente indicadas, como se verá mais à frente neste trabalho.

O Problema das Pontes de *Königsberg* é usualmente apontado como o primeiro trabalho onde se recorre à modelação em Teoria dos Grafos. Desde então, tem-se utilizado esta técnica para resolver (ou procurar resolver) problemas diversos nas mais variadas áreas, como, por exemplo, problemas de redes de transportes, problemas de telecomunicações, etc.

3.2 Conceitos básicos da Teoria de Grafos

Os grafos são estruturas abstratas que representam relações existentes num conjunto de elementos. Muitos problemas no mundo real podem ser resolvidos com o recurso a modelos de grafos. Nesta secção apresentam-se os conceitos e resultados básicos da Teoria dos Grafos.

Definição 3.2.1: Um **grafo não orientado** G é um par (V,A) onde V é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices ou nodos e A é uma família finita de pares não ordenados de elementos de V, não necessariamente distintos, chamados arestas, que ligam os vértices de V.

Exemplo:

Na figura seguinte estão representadas 4 cidades (A, B, C e D) e as estradas de ligação entre elas.

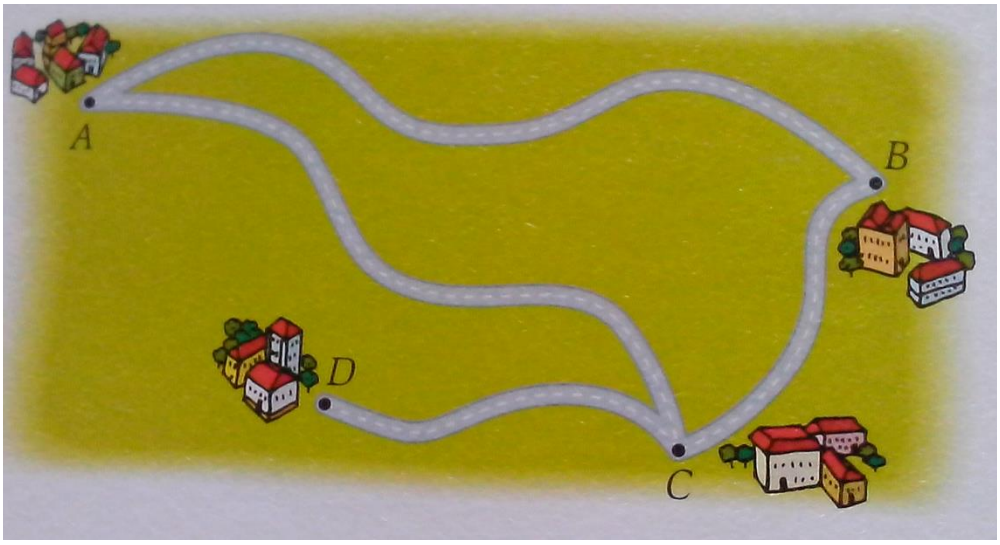


Figura 3.2.1 – Esquema representativo das ligações entre 4 cidades

Um grafo correspondente à situação real apresentada seria por exemplo, o grafo que se encontra na seguinte figura:

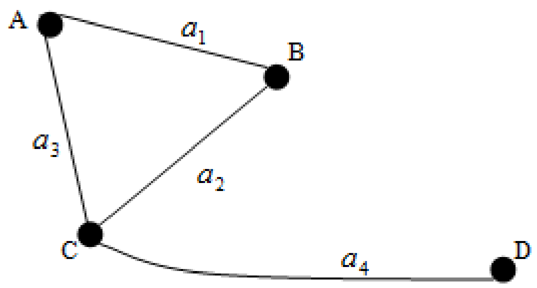


Figura 3.2.2 – Grafo representativo do esquema da figura 3.2.1

Note-se que um grafo admite múltiplas representações. Apenas nos interessa conhecer os pontos e as linhas que os ligam.

Uma outra representação deste grafo pode ser a que se encontra na figura 3.2.3.

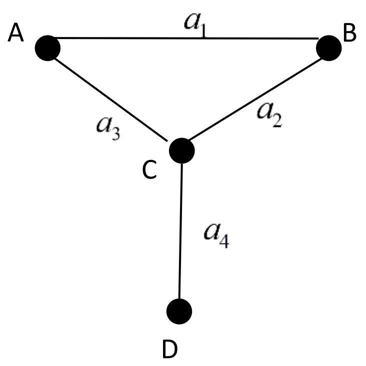


Figura 3.2.3 – Grafo representativo do esquema da figura 3.2.1

No grafo da figura 3.2.3, os pontos A, B C e D são os vértices ou nodos do grafo e as linhas que os unem são as arestas do grafo.

Pode definir-se:

O conjunto dos vértices $V = \{A, B, C, D\}$

O conjunto das arestas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{C, D\}\}$

Cada aresta une dois vértices que se designam por extremos da aresta. Assim, por exemplo, os pontos A e B são os extremos da aresta $\{A, B\}$.

Definição 3.2.2: Diz-se que uma aresta é **incidente** nos seus vértices extremos, os quais, por esse motivo, se dizem **adjacentes**. Também se diz que duas arestas incidentes no mesmo vértice são arestas adjacentes. Por sua vez, duas arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**.

Observe-se o grafo G seguinte:

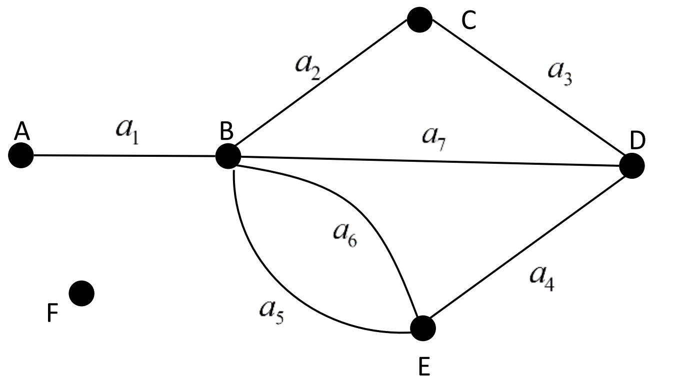


Figura 3.2.4 – Grafo G

No grafo da figura 2.3.4, tem-se:

O conjunto dos vértices $V = \{A, B, C, D, E, F\}$

O conjunto das arestas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$

As arestas a_5 e a_6 são arestas paralelas.

O vértice F diz-se isolado pois não tem ligação com nenhum outro vértice.

Definição 3.2.3: Um grafo diz-se **simples** se não contém arestas paralelas. Por outro lado, um grafo simples com um único vértice designa-se por grafo trivial.

Nota: É comum designar-se por **multigrafo** um grafo com arestas paralelas.

Por exemplo, o grafo da figura 3.2.3 é um grafo simples porque não contém arestas paralelas.

Definição 3.2.4: O número de vértices de um grafo G designa-se por **ordem** de G e representa-se por $|V(G)|$. Por outro lado, o número de arestas, $|A(G)|$, designa-se por **dimensão** do grafo G .

Por exemplo, no grafo da figura 3.2.4, tem-se que $|V(G)| = 6$ e $|A(G)| = 7$.

Definição 3.2.5: Um grafo diz-se **completo** se quaisquer dois dos seus vértices forem adjacentes, isto é, se existir pelo menos uma aresta para cada par de vértices.

Na figura seguinte o grafo G_1 não é completo. Os vértices A e C não são adjacentes. Por sua vez o grafo G_2 é um grafo completo.

Figura 3.2.5 – Grafo Completo

Definição 3.2.6: O **grau** de um vértice é igual ao número de arestas que nele incide.

Definição 3.2.7: Um grafo diz-se **regular** se todos os vértices tiverem o mesmo grau.

Exemplo:

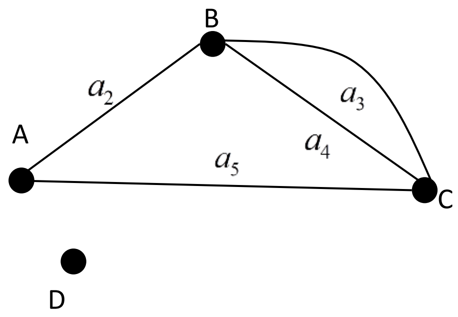


Figura 3.2.6 – Grau de um vértice

Relativamente ao grafo da figura 3.2.6 tem-se:

Grau do vértice A: 2

Grau do vértice B: 3

Grau do vértice C: 3

Grau do vértice D: 0

Grande parte da Teoria de Grafos envolve sequências especiais de vértices. As mais relevantes são as cadeias e os ciclos.

Definição 3.2.8: Uma **cadeia** é uma sequência alternada de vértices e arestas em que cada dois vértices consecutivos estão ligados por uma aresta, podendo haver repetição de vértices ou arestas. Se todas as arestas são distintas então a cadeia diz-se **simples** e se, adicionalmente, todas os vértices são distintos a cadeia designa-se por cadeia **elementar**.

Definição 3.2.9: Uma cadeia com pelo menos uma aresta e tal que o vértice inicial coincide com o final, designa-se por **ciclo** ou por **cadeia fechada**. Por sua vez, um ciclo que não repete arestas diz-se **simples** e, um ciclo sem repetição de arestas e vértices (à exceção das extremidades) diz-se **elementar**.

Exemplo:

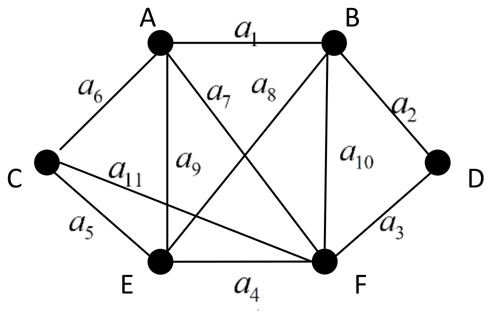


Figura 3.2.7 – Cadeias e Ciclos

A figura 3.2.7 representa um grafo onde

A sequência $A, a_1, B, a_2, D, a_3, F, a_{11}, C, a_5, E, a_4, F, a_{10}, B$ é uma cadeia simples entre os vértices A e B.

A sequência $A, a_7, F, a_3, D, a_2, B$ representa uma cadeia elementar entre os vértices A e B.

A cadeia $A, a_1, B, a_2, D, a_3, F, a_{11}, C, a_5, E, a_4, F, a_7, A$ é um ciclo simples.

A cadeia $F, a_{11}, C, a_5, E, a_4, F$ é um ciclo elementar.

Estas sequências podem ser representadas indicando apenas as suas arestas e no caso do grafo ser simples indicando apenas os seus vértices.

Assim, no grafo pode representar-se por exemplo a cadeia $A, a_1, B, a_2, D, a_3, F, a_{11}, C, a_5, E, a_4, F, a_{10}, B$ por $a_1, a_2, a_3, a_{11}, a_5, a_4, a_{10}$ e, dado que é um grafo simples (não tem arestas paralelas), por A, B, D, F, C, E, F, B.

Definição 3.2.10: Um grafo diz-se **conexo** quando entre qualquer par de vértices existe pelo menos uma cadeia. Caso contrário diz-se **desconexo**.

Nota: Uma aresta cuja remoção transforma um grafo conexo num grafo desconexo chama-se uma **ponte**.

Na figura 3.2.8 o grafo G_1 é conexo e o grafo G_2 é desconexo.

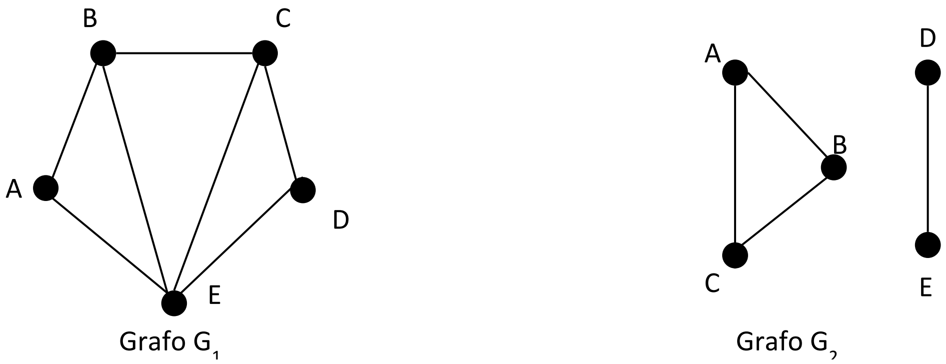


Figura 3.2.8 – Grafo conexo

3.3 Grafos Eulerianos

Definição 3.3.1: Uma cadeia designa-se por **cadeia de Euler** se passa por todas as arestas (logo também todos os vértices) do grafo a que se refere, uma e uma só vez, isto é, se for uma cadeia simples. Por sua vez, designa-se por **ciclo de Euler**, todo o ciclo que contenha todas as arestas do grafo uma e uma só vez. Desta definição decorre que um ciclo de Euler é uma cadeia de Euler fechada.

Definição 3.3.2: Um grafo conexo diz-se **Euleriano** (ou grafo de Euler) se admite um ciclo de Euler.

O grafo da figura 3.3.1 é euleriano pois nele pode definir-se o ciclo euleriano $A, B, D, F, E, C, A, F, B, E, A$.

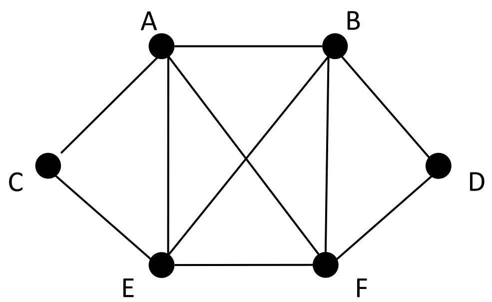


Figura 3.3.1 – Grafo Euleriano

O nome de Euler surge associado a este tipo de grafo, já que o matemático foi a primeira pessoa a resolver o Problema das Pontes de *Königsberg* (secção 3.1), o qual levantava a questão se seria possível atravessar cada uma das sete pontes da cidade apenas uma vez, voltando ao ponto de partida. Com base nestes conceitos, o Problema das Pontes de *Königsgsberg* reduz-se à questão de saber se o respetivo grafo é ou não euleriano.

A resolução de problemas como o anterior, pode não ser simples. Pode perder-se muito tempo à procura de um ciclo que pode nem sequer existir.

Os teoremas que se seguem facilitam a resolução destes problemas:

Teorema 3.3.1 (Teorema de Euler): Um grafo é euleriano se e só se é conexo e todos os vértices têm grau par.

Teorema 3.3.2: Um grafo admite uma cadeia euleriana se e só se é conexo e tem no máximo dois vértices com grau ímpar. Tal cadeia terá início num dos vértices de grau ímpar e termina no outro vértice de grau ímpar.

O teorema de Euler permite responder à questão do Problema das Pontes de *Königsberg*, já que a observação do grafo da figura 3.1.2 indica a existência de quatro vértices com grau ímpar. Consequentemente, não é possível iniciar uma viagem num dado ponto inicial, atravessar cada ponte exatamente uma vez, e retornar ao ponto de partida.

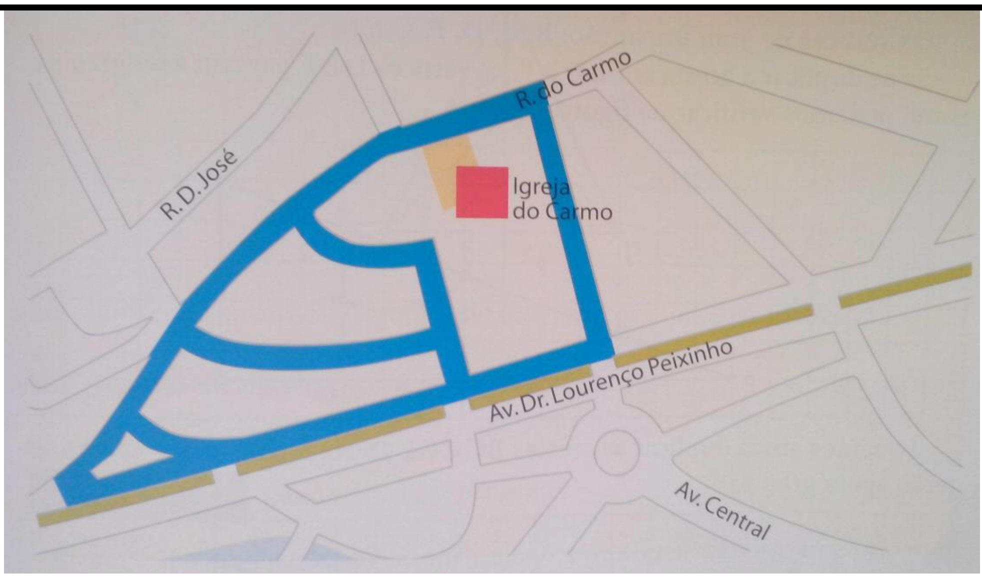
O teorema 3.3.2 pode ser usado na questão das pontes de Königsberg, na formulação que se segue:

"*É possível iniciar a viagem num qualquer ponto da cidade, atravessar todas as pontes exatamente uma vez, e terminar num outro ponto qualquer?*"

Como há quatro vértices com grau ímpar, a resposta continua a ser negativa.

O problema que se segue ilustra a aplicação do conceito de grafo euleriano a um problema real.

Problema 3.3.1 *- A figura seguinte representa uma parte da planta de uma cidade. O Sr. André é carteiro e todos os dias sai da estação dos correios e estaciona a carrinha junto à Igreja do Carmo. A sua tarefa consiste em distribuir o correio pelas casas do bairro indicado a azul.*



Claro que o Sr. André quer cumprir a sua tarefa da forma mais eficiente possível:

- *Percorrer todas as ruas do bairro;*
- *Acabar a distribuição no sítio onde começou, junto à Igreja do Carmo;*
- *Não repetir ruas a não ser que seja absolutamente necessário.*

Como poderá fazê-lo?

MACS 11/12, Areal Editores (adaptado)

Resolução do *Problema 3.3.1*

Comece-se por desenhar um grafo que representa a situação descrita onde cada vértice representa um cruzamento e cada aresta uma rua a ligar dois cruzamentos.

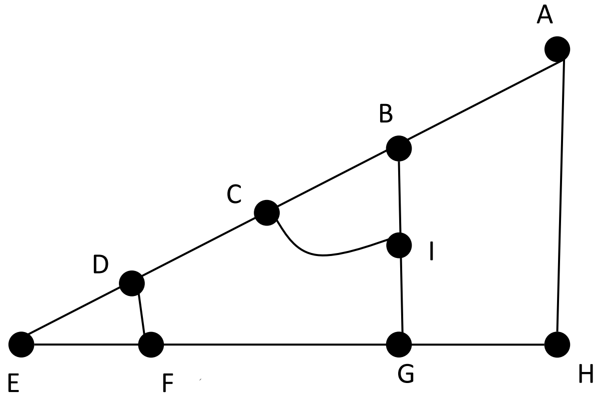


Figura 3.3.2 – Grafo representativo do problema 3.3.1

É fácil observar que este grafo tem vários vértices de grau ímpar o que, de acordo com o Teorema de Euler, garante a não existência de um ciclo de Euler para este grafo.

O Sr. André vai ter que repetir algumas ruas (arestas). A preocupação terá de ser encontrar uma forma de repetir um número mínimo de arestas. Para simplificar a situação não vamos considerar o comprimento das ruas, ou seja, tal aspeto é considerado, nesta situação, irrelevante.

O que terá de se fazer é duplicar, no grafo considerado, um número mínimo de arestas de forma que todos os vértices tenham grau par.

O processo da duplicação de arestas por forma tornar possível encontrar um ciclo euleriano chama-se **Eulerização**. Eulerizar um grafo é um processo que consiste em acrescentar arestas a um grafo, por duplicação das já existentes, até que se obtenha um grafo conexo só com vértices de grau par. O grafo resultante passa a admitir um ciclo de Euler. A eulerização de um grafo é uma técnica muito aplicada, nomeadamente sempre que se pretende descobrir o percurso mais económico em termos de repetição de ruas, linhas, etc. Tal acontece frequentemente nas grandes cidades a propósito das mais variadas situações – percurso de serviços municipalizados na recolha de lixo, na limpeza de ruas, na distribuição do correio, entre outras.

No grafo da figura 3.3.2 os vértices de grau ímpar são: B, C, D, F, G e I.

Se se duplicar a aresta entre D e F, os vértices D e F passam a ter grau par, como podemos verificar na figura seguinte:

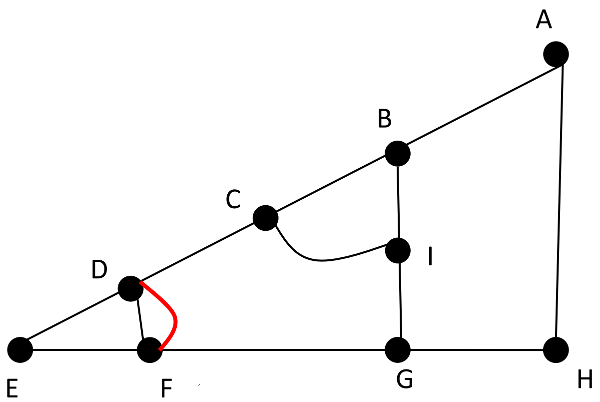


Figura 3.3.3 – Eulerização de um grafo

Podem ainda duplicar-se as arestas BC e GI. Desta forma, todos os vértices terão agora grau par.

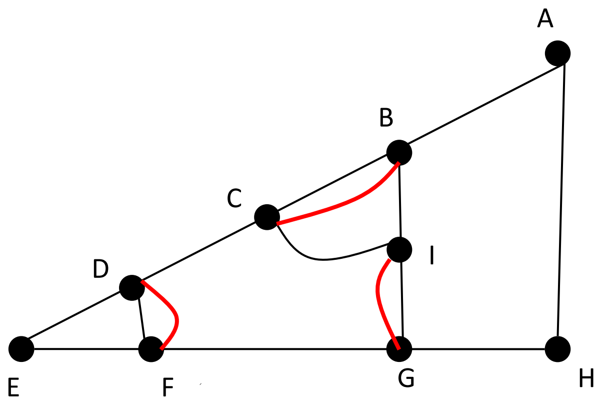


Figura 3.3.4 - Eulerização de um grafo

Um percurso possível para o Sr. André que comece e termine no cruzamento junto à Igreja do Carmo é, por exemplo, I-G-H-A-B-C-D-E-F-D-F-G-I-C-B-I.

3.4 Grafos Hamiltonianos

O nome, grafo hamiltoniano, deriva de um puzzle feito, em 1857, pelo matemático Hamilton, designado por Viagem à Volta do Mundo. O puzzle consistia num dodecaedro de madeira (um poliedro com doze pentágonos regulares como faces), onde os vinte vértices do dodecaedro representavam vinte cidades diferentes. O que se pretendia era iniciar a viagem numa dessas cidades e visitar as restantes dezanove exatamente uma vez, retornando à cidade de onde se partiu.

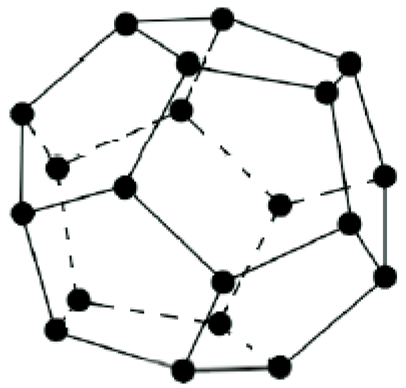


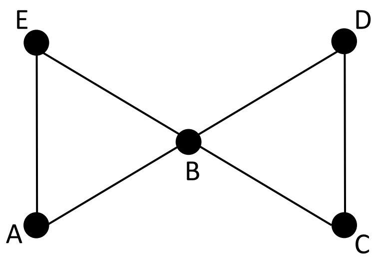
Figura 3.4.1 - Dodecaedro

Definição 3.4.1: Uma cadeia designa-se por **cadeia de Hamilton** ou **cadeia hamiltoniana** se passa por todos os vértices do grafo a que se refere, uma e uma só vez, isto é, se for uma cadeia elementar passando por todos os vértices do grafo. Por sua vez, um ciclo que contém todos os vértices de um grafo, uma e uma só vez, designa-se por **ciclo de Hamilton** ou **ciclo hamiltoniano**.

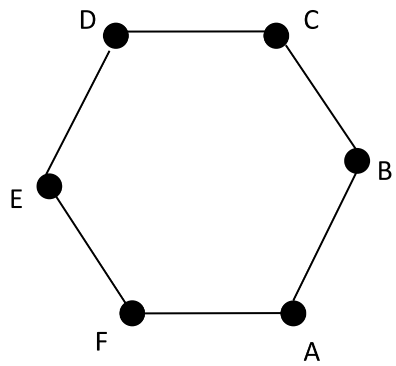
Da definição anterior decorre que um ciclo de Hamilton é uma cadeia de Hamilton fechada.

Definição 3.4.2: Um grafo que admite um ciclo de Hamilton designa-se por **grafo hamiltoniano** ou **grafo de Hamilton**.

Exemplo:



Grafo G_1



Grafo G_2

O grafo G_1 não é de Hamilton. Para visitar todos os vértices tem-se, necessariamente de passar duas vezes em B.

O grafo G_2 é de Hamilton. Por exemplo, o ciclo ABCDEFA é um ciclo de Hamilton.

O problema de Hamilton pode ser reformulado em termos de grafos - existe um ciclo que passe exatamente em cada vértice uma única vez? A resposta consiste em determinar no grafo um ciclo hamiltoniano e é afirmativa.

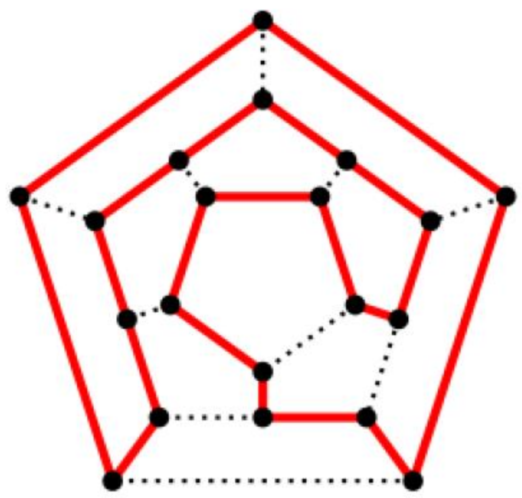


Figura 3.4.3 – Grafo representativo do problema de Hamilton

Salienta-se que, embora se conheça um processo para averiguar se um grafo conexo tem, ou não, um ciclo de Euler (Teorema de Euler), não existe nenhum critério idêntico que permita dado um grafo qualquer, verificar de imediato se existe ou não um ciclo Hamiltoniano. Há, contudo, alguns tipos de grafos, com características próprias, que permitem afirmar se possuem ou não ciclos Hamiltonianos.

Por exemplo, sabe-se que

- num grafo com pontes não existem ciclos Hamiltonianos;
- num grafo completo existem sempre ciclos Hamiltonianos.

O Problema do Caixeiro Viajante

Derivados do problema de Hamilton, surgiram muitos problemas, conhecidos de forma genérica por Problemas do Caixeiro Viajante, em que se admite que um caixeiro viajante tem de visitar n cidades diferentes iniciando e terminando a sua viagem numa das cidades. O objetivo final consiste em descobrir o percurso que torna mínima a distância total da viagem visitando cada cidade uma e uma só vez.

Os Problemas do Caixeiro Viajante têm uma grande aplicação em diversas situações, principalmente em questões ligadas à Gestão e Economia.

Problema 3.4.1 *- Uma empresa internacional vai abrir cinco novas sucursais em cinco cidades portuguesas: Porto, Viseu, Coimbra, Lisboa e Faro.*

A empresa pretende colocar a sede nacional em Lisboa e, periodicamente, fazer uma vistoria às restantes sucursais. Sendo limitado o orçamento, é preciso que tal vistoria seja feita numa única viagem, de modo a que o circuito que parta da sede e passe por todas a sucursais tenha uma quilometragem total mínima.

.

Atendendo às distâncias, em quilómetros, entre cada uma das cidades indicada na tabela seguinte, encontre uma solução ótima para o problema proposto.

	Porto	*Viseu*	*Coimbra*	*Lisboa*	*Faro*
Porto	*0*	*133*	*114*	*332*	*607*
Viseu	*133*	*0*	*90*	*308*	*629*
Coimbra	*114*	*90*	*0*	*218*	*493*
Lisboa	*332*	*308*	*218*	*0*	*315*
Faro	*607*	*629*	*493*	*315*	*0*

MACS 11/12, Areal Editores

Resolução do *Problema 3.4.1*

O problema pode ser modelado por um grafo em que cada vértice representa cada uma das cinco cidades e cada aresta representa a ligação entre cada duas cidades à qual está associada a distância entre elas.

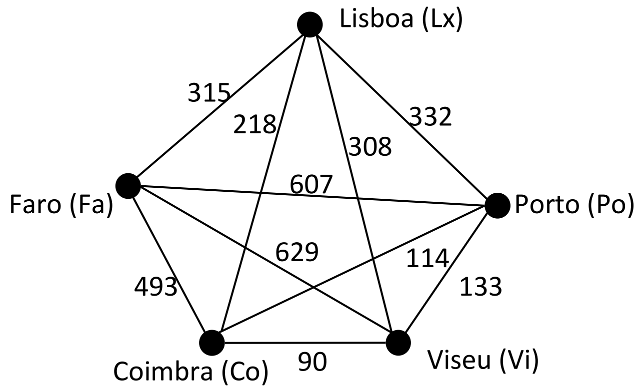


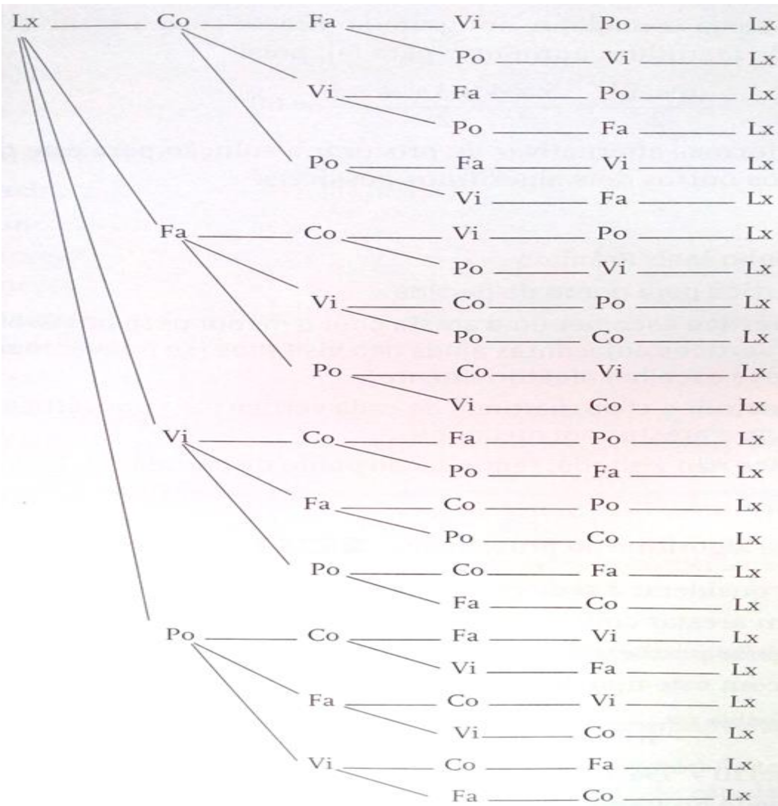
Figura 3.4.4 – Grafo representativo do *Problema 3.4.1*

A um grafo como o anterior chama-se grafo **pesado** ou **ponderado** e designa-se geralmente por **rede**. O número associado a cada aresta chama-se **peso**.

Neste caso o peso representa a distância entre as cidades, que são extremos de cada aresta, podendo também representar custos, tempo, etc.

O que se pretende neste problema é encontrar um ciclo hamiltoniano de comprimento ou peso mínimo. Para isso há que considerar todos os ciclos hamiltonianos com início em Lisboa e calcular a soma do peso das arestas.

Para facilitar a procura de todos os ciclos pode usar-se um diagrama em árvore.



Ao considerar todas as formas possíveis de escolher os cinco vértices que formam os ciclos de Hamilton, verifica-se a existência de ciclos repetidos. Por exemplo os percursos Lisboa-Faro-Coimbra-Viseu-Porto-Lisboa e Lisboa-Porto-Viseu-Coimbra-Faro-Lisboa representam o mesmo ciclo hamiltoniano.

Na tabela seguinte estão representados todos os ciclos hamiltonianos e as respetivas somas dos pesos das arestas:

Lx – Co – Fa – Vi – Po – Lx	218+493+629+133+332=1805
Lx – Co – Fa – Po – Vi – Lx	218+493+607+133+308=1759
Lx – Co – Vi – Fa – Po – Lx	218+90+629+607+332=1876
Lx – Co – Vi – Po – Fa – Lx	218+90+133+607+315=1363
Lx – Co – Po – Fa – Vi – Lx	218+114+607+629+308=1876
Lx – Co – Po – Vi – Fa – Lx	218+114+133+629+315=1409
Lx – Fa – Co – Vi – Po – Lx	315+493+90+133+332=1363
Lx – Fa – Co – Po – Vi – Lx	315+493+114+133+308=1363
Lx – Fa – Vi – Co – Po – Lx	315+629+90+114+332=1480
Lx – Fa – Po – Co – Vi – Lx	315+607+114+90+308=1434
Lx – Vi – Co – Fa – Po – Lx	308+90+493+607+332=1830
Lx – Vi – Fa – Co – Po – Lx	308+629+493+114+332=1876

Tabela 3.4.1 – Soma dos pesos das arestas dos ciclos hamiltonianos do grafo da figura 3.4.1

Desta forma verifica-se que o comprimento mínimo possível para um ciclo de Hamilton é de 1363 km e que tal soma pode ser atingida de várias formas:

Lisboa – Coimbra – Viseu – Porto – Faro – Lisboa

Lisboa – Faro – Coimbra – Viseu – Porto – Lisboa

Lisboa – Faro – Coimbra – Porto – Viseu – Lisboa.

Note-se agora que em termos de minimização do comprimento total do ciclo não é relevante o local onde se começa, o local da sede no presente problema, mas sim a ordem das cidades a visitar que deverá respeitar uma das três ordens acima enunciadas. Se a sede fosse em Coimbra, Viseu, Faro ou Porto, obteríamos também ciclos com 1363 km.

O processo descrito é, no entanto, muito trabalhoso uma vez que é necessário considerar todos os ciclos de Hamilton que existem num grafo. No problema anterior, num grafo completo com 5 vértices, existem 12 ciclos de Hamilton possíveis. Se o grafo considerado tivesse, por exemplo, 6 vértices o número de ciclos de Hamilton aumentaria para 60 e tratando-se de um problema combinatório o aumento será exponencial.

Nota: Num grafo completo existem $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos de Hamilton.

Os dois algoritmos que se apresentam a seguir asseguram uma solução rápida, mesmo em grafos com muitos vértices mas cujo resultado não tem a garantia de ser a solução ótima ou o caminho mais curto (no caso de distâncias). Em muitos casos será uma solução não muito longe da solução ótima.

Algoritmo do vizinho mais próximo

1. Escolher um vértice para ponto de partida.

2. A partir deste vértice escolher uma aresta com o menor peso possível que esteja ligada a um dos vértices adjacentes ainda não visitados (se houver mais do que uma hipótese escolher aleatoriamente).

3. Continuar a construir o ciclo, partindo de cada vértice para um vértice não visitado segundo a aresta com menor peso.

4. Do último vértice não visitado, regressar ao ponto de partida

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas

1. Ordenam-se as arestas pelos seus pesos.

2. Escolhe-se sucessivamente a aresta a que corresponde o menor peso, tendo em conta as seguintes restrições:

a) não permitir que se formem ciclos que não incluam todos os vértices;

b) nunca se pode escolher três arestas que coincidam num mesmo vértice.

Para ilustrar a aplicação destes dois algoritmos, bem como as diferenças entre eles, considere-se o grafo que ilustra a situação do problema anterior.

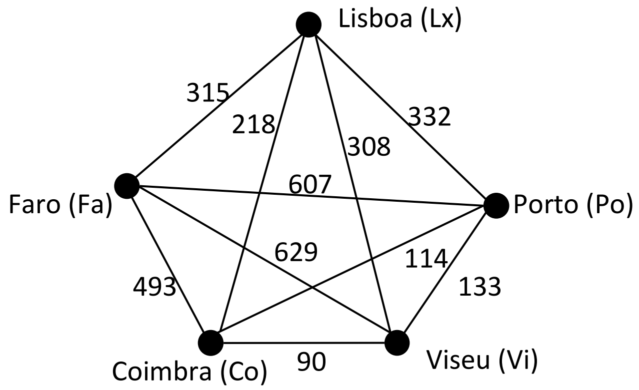


Figura 3.4.5 – Grafo representativo do *Problema 3.4.1*

Algoritmo do vizinho mais próximo

Dado que a sede é em Lisboa, será este o ponto de partida. De Lisboa saem arestas com pesos 315, 218, 308,332. A aresta com menor peso é a de 218, que liga Lisboa a Coimbra. Continuando o mesmo raciocínio, obtém-se o ciclo

Lisboa – Coimbra – Viseu – Porto – Faro – Lisboa

A que corresponde uma distância total de

218+90+133+607+315=1363 km

Esta solução corresponde à solução ótima já encontrada pela determinação de todos os ciclos de Hamilton.

Algoritmo do peso das arestas

Começa-se escolhendo a aresta com menor peso que liga Coimbra a Viseu (90).

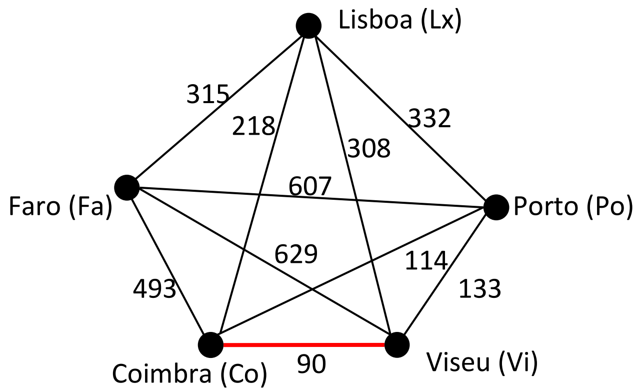


Figura 3.4.6 – Aplicação do algoritmo do peso das arestas

A segunda escolha é a aresta que liga Coimbra ao Porto (114).

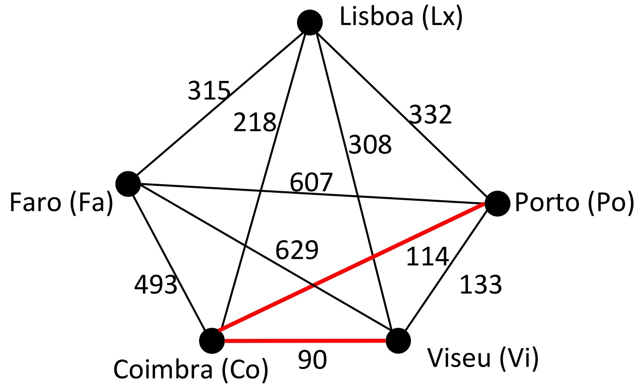


Figura 3.4.7 - Aplicação do algoritmo do peso das arestas

A próxima aresta com menor peso é a que liga Porto a Viseu (133) que não pode ser escolhida porque formaria um ciclo juntamente com as anteriores.

A aresta seguinte com menor peso é a que liga Coimbra a Lisboa (218) e que também não pode ser escolhida pela impossibilidade de incidirem três arestas no mesmo vértice.

A terceira aresta escolhida é a que liga Viseu a Lisboa (308).

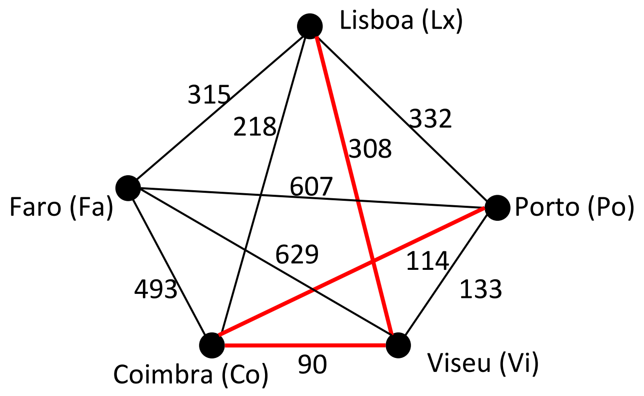


Figura 3.4.8 - Aplicação do algoritmo do peso das arestas

A quarta aresta escolhida é a que liga Lisboa a Faro (315).

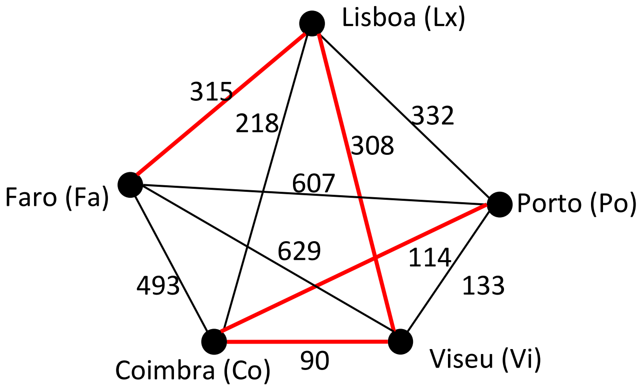


Figura 3.4.9 - Aplicação do algoritmo do peso das arestas

A aresta que liga Porto a Lisboa (332) não pode ser escolhida pois formaria um ciclo e a aresta que liga Faro a Coimbra (493) não pode ser escolhida pois ter-se-iam três arestas a incidir num vértice.

Finalmente a aresta que liga Faro ao Porto (607) termina o ciclo de Hamilton cujo comprimento total é 90+114+308+315+607=1414 km

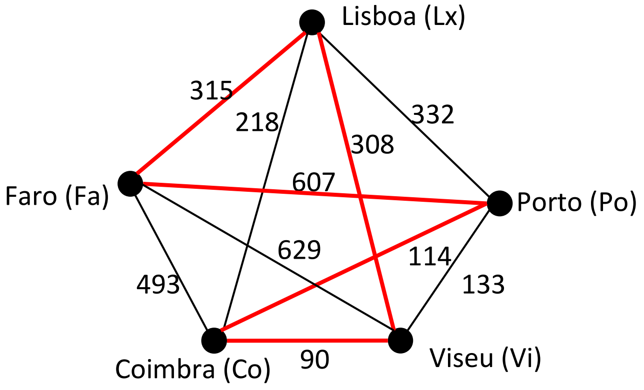


Figura 3.4.10 - Aplicação do algoritmo do peso das arestas

A solução encontrada neste último algoritmo, como se sabe, não é a solução ótima, no entanto, não sendo uma solução perfeita pode ser considerada de “boa qualidade” (o desvio relativo é inferior a 3%).

3.5 Árvores

Nesta secção apresenta-se uma classe de grafos conexos – a classe das árvores.

O facto da resolução de muitos problemas associados a grafos se fazer com recurso a árvores, faz desta classe uma das mais importantes na Teoria dos Grafos.

Os primeiros estudos sobre árvores foram realizados pelo matemático britânico Arthur Cayley em 1857, pelo que o reconhecimento da sua importância vem praticamente desde as origens da Teoria dos Grafos.

Definição 3.5.1: Designa-se por **floresta** um grafo sem ciclos e por **árvore** um grafo conexo sem ciclos.

Na figura seguinte está representada uma floresta com duas árvores:

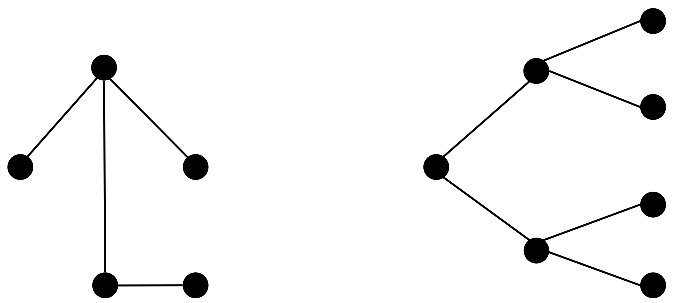


Figura 3.5.1 – Árvores

Tem-se, obviamente que

- Uma floresta é um grafo em que cada componente conexa é uma árvore;
- Só podem ser florestas os grafos simples.

Definição 3.5.2: Uma árvore diz-se **abrangente** (ou de suporte) de um grafo se contiver todos os vértices desse grafo.

Definição 3.5.3: Uma árvore abrangente de um grafo diz-se **mínima** se é mínima a soma dos pesos das arestas que a constituem.

O maior interesse do estudo das árvores reside no facto de encontrar a árvore abrangente de peso mínimo representativa de um grafo conexo, indicar a forma mais económica de ligar entre si um conjunto de pontos correspondentes aos vértices de um grafo.

Dentro da área dos grafos, o problema de encontrar a árvore abrangente mínima aparece relacionada com muitas situações: minimização de custos (sejam eles tempo, distâncias, etc.) de redes, seja de computadores, de telecomunicações, de sistemas rodoviários ou ferroviários, de transportes e distribuições, etc.

Como determinar a árvore abrangente de peso mínimo?

Proposição 3.5.1: Seja $G=(X,A)$ um grafo não orientado e T uma árvore abrangente em G. Então, T tem $|X|-1$ arestas.

Considere-se o grafo G representado na figura seguinte:

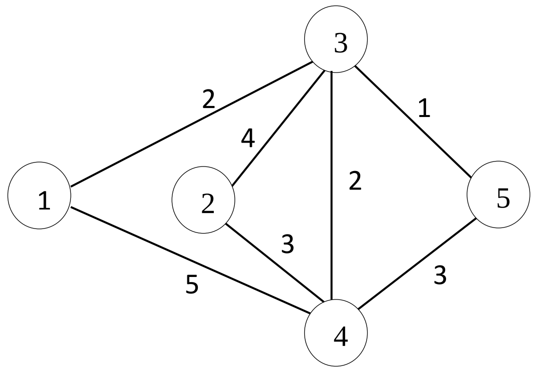


Figura 3.5.2 – Grafo G

Relativamente ao grafo $G=(X,A)$ representado na figura 3.5.2, tem-se que:

$X=\{1,2,3,4,5\}$ e $A=\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$

Uma árvore abrangente em G é por exemplo:

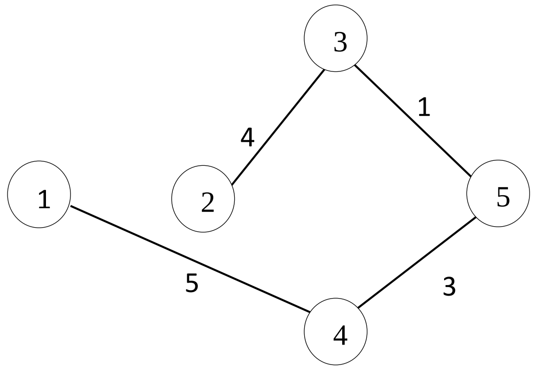


Figura 3.5.3 – Árvore abrangente do grafo G da figura 3.5.2

O peso total desta árvore abrangente é 3+4+5+1=13.

Considerem-se duas situações:

Situação 1: Qualquer aresta se for retirada da árvore separa-a em duas componentes conexas e induz no grafo um corte (conjunto de arestas que se retiradas deixam o grafo desconexo) que se designa por corte induzido pela aresta retirada da árvore.

Por exemplo, a remoção da aresta $\{4,5\}$ na árvore abrangente da figura e induz no grafo G um corte que contém as arestas $\{1,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{4,5\}$.

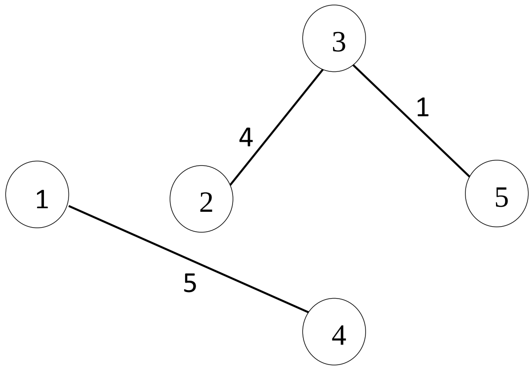


Figura 3.5.4 - Remoção da aresta {4,5} da árvore da figura 3.5.3

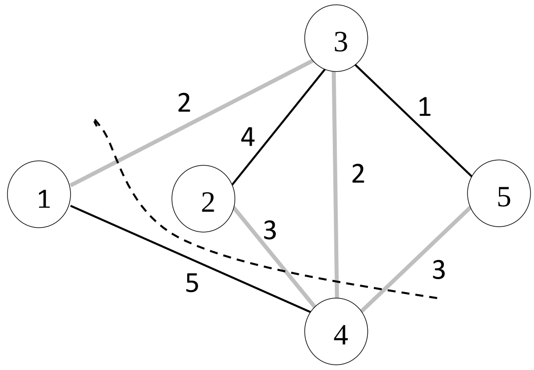


Figura 3.5.5 – Corte induzido pela remoção da aresta {4,5}

A troca de uma aresta $\{x, y\}$ de uma árvore abrangente por uma outra aresta do corte induzido por $\{x, y\}$ permite obter uma árvore de suporte diferente.

Se no corte corte induzido por $\{x, y\}$ existir uma aresta $\{a,b\}$ com menor peso do que o peso da aresta $\{x, y\}$ então, a árvore abrangente que se obtém substituindo $\{x, y\}$ por $\{a,b\}$ tem peso total mais baixo.

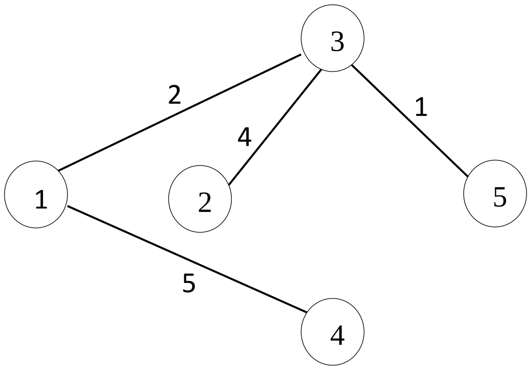


Figura 3.5.6 – Árvore abrangente obtida pela substituição da aresta {4,5} pela aresta {1,3}

A árvore abrangente da figura 3.5.6 tem um peso total de 5+4+2+1=12.

Este processo de substituição de uma aresta $\{x, y\}$ por outra de menor peso pertencente ao corte induzido por $\{x, y\}$ permite obter árvores abrangentes com peso cada vez menor e só termina quando a árvore não puder ser melhorada desta forma.

Quando em nenhum corte induzido por qualquer das arestas se conseguir um peso total mais baixo tem-se a garantia que a árvore abrangente obtida é ótima.

Condição de Otimalidade de Corte

Seja $G = (X, A)$ um grafo não orientado e T uma árvore abrangente de valor mínimo em G. Seja $\lfloor S_x, S_y \rfloor$ o corte induzido em G pela aresta $\{x, y\}$ e c_{xy} o custo da aresta $\{x, y\}$. Então

$$\forall\{x, y\} \in T, \forall\{\mathrm{k},\mathrm{l}\} \in \lfloor \mathrm{S}_x, S_y \rfloor \Rightarrow c_{xy} \le c_{kl}$$

Proposição 3.5.2: Seja $G(X, A)$um grafo não orientado e T uma árvore abrangente em G. T é ótima (de valor mínimo) se e só se satisfaz a condição de otimalidade de corte.

Situação 2: Qualquer aresta adicionada à árvore forma um ciclo que designa por ciclo induzido pela aresta adicionada.

Por exemplo, ao adicionar a aresta $\{2,4\}$ na árvore abrangente da figura 3.5.3 esta induz um ciclo (único) que contém as arestas $\{2,4\}, \{4,5\}$, $\{3,5\}$, $\{3,2\}$.

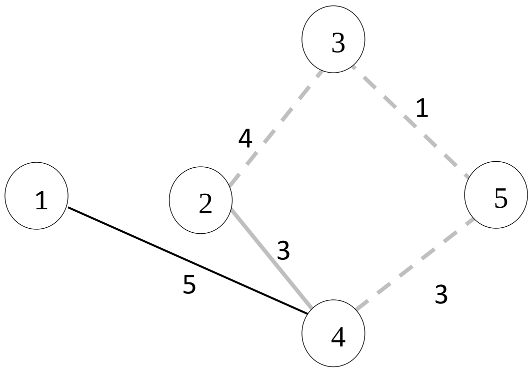


Figura 3.5.7 – Ciclo induzido pela aresta {2,4}

A troca de uma aresta $\{x, y\}$ de uma árvore abrangente por uma outra aresta do ciclo induzido por $\{x, y\}$ permite obter uma árvore de suporte diferente.

Se nesse ciclo existir uma aresta $\{a, b\}$ com maior peso do que o peso da aresta $\{x, y\}$ então, a árvore abrangente que se obtém substituindo $\{a, b\}$ por $\{x, y\}$ tem peso total mais baixo.

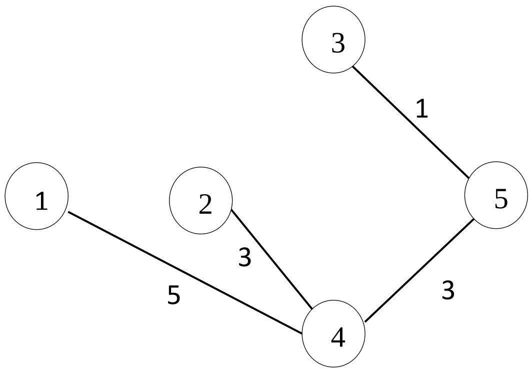


Figura 3.5.8 – Árvore abrangente obtida pela substituição da aresta {2,3} pela aresta {2,4}

A árvore abrangente da figura 3.5.8 tem um peso total de 5+3+3+1=12

Este processo de inserção de uma aresta $\{x, y\}$ substituindo outra de maior peso pertencente ao ciclo induzido por $\{x, y\}$ permite obter árvores abrangentes com peso cada vez menor e só termina quando a árvore não puder ser melhorada desta forma.

Quando inserindo qualquer das arestas do grafo não pertencentes à árvore abrangente e, considerando o ciclo induzido correspondente, se não se conseguir um peso total mais baixo tem-se a garantia que a árvore abrangente obtida é ótima.

Condição de Otimalidade de Ciclo

Seja $G = (X, A)$ um grafo não orientado e T uma árvore abrangente de valor mínimo em G. Seja $\{x, y\}$ uma aresta não pertencente a T, CI_{xy} o ciclo induzido pela aresta $\{x, y\}$ e c_{xy} o custo da aresta $\{x, y\}$. Então

$$\forall\{x, y\} \notin T, \forall\{\mathrm{k}, \mathrm{l}\} \in CI_{xy} \Rightarrow c_{xy} \geq c_{kl}$$

Proposição3.5.3: Seja $G(X, A)$ um grafo não orientado e T uma árvore abrangente em G. T é ótima (de valor mínimo) se e só se satisfaz a condição de otimalidade de ciclo.

As condições de otimalidade de ciclo e otimalidade de corte estão na base de dois algoritmos para a determinação de árvores abrangentes de peso mínimo, o **Algoritmo de Kruskal** e o **Algoritmo de Prim** e garantem que o resultado obtido, em ambos os casos, é sempre uma solução ótima.

Apresentam-se, em seguida, estes algoritmos e dois exemplos concretos da aplicação destes algoritmos.

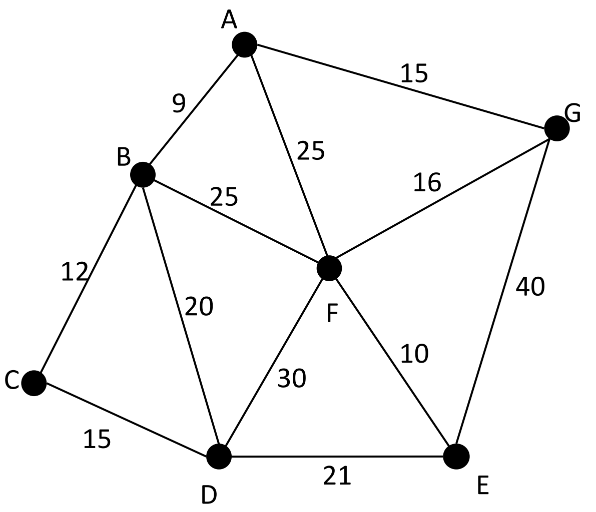
Algoritmo de Prim

O algoritmo de Prim inicia-se por escolher um qualquer vértice e a aresta com menor peso que une esse vértice a qualquer outro vértice do grafo e sucessivamente adicionar à árvore a aresta com menor peso que liga um vértice já incluído na árvore com um vértice ainda isolado.

Problema 3.5.1 *- Sete pequenas localidades de um concelho estão ligadas umas às outras por estradas.*

Verificando o mau estado destas infraestruturas, o departamento responsável pela manutenção das estradas do concelho pretende colocar um novo pavimento em algumas das estradas, de modo a que seja possível ir de uma localidade a qualquer outra em boas condições.

A figura seguinte mostra um mapa da região onde os vértices representam as localidades e as arestas representam as estradas. Os pesos associados às arestas representam as distâncias entre as localidades ligadas por uma estrada.



Com o orçamento muito limitado pretende-se que seja mínimo o número de quilómetros a pavimentar.

Quais as estradas que devem ser objeto de obras?

Resolução do *Problema 3.5.1*

Comece-se por exemplo pelo vértice A.

A aresta $\{A, B\}$ é a aresta com menor peso que liga o vértice A a outro vértice do grafo, pelo que é a primeira aresta selecionada para a árvore.

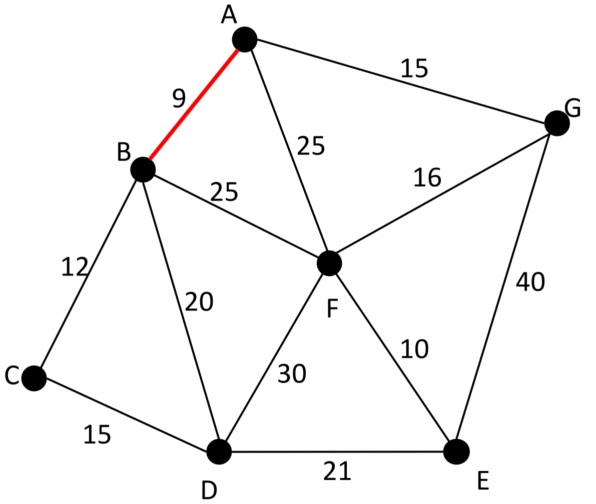


Figura 3.5.9 - Aplicação do algoritmo de Prim

A próxima aresta a selecionar é a aresta com menor peso e que incida num dos dois vértices que já estão na árvore (A ou B). Essa aresta é $\{B, C\}$.

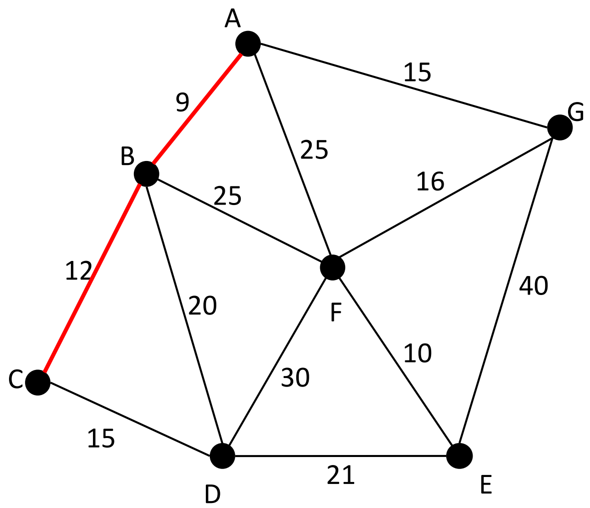


Figura 3.5.10 - Aplicação do algoritmo de Prim

Das arestas que têm uma extremidade na árvore há duas que têm menor peso: $\{A,G\}$ e $\{C,D\}$. A escolha entre as duas é aleatória.

Adicione-se por exemplo a aresta $\{A,G\}$ à árvore.

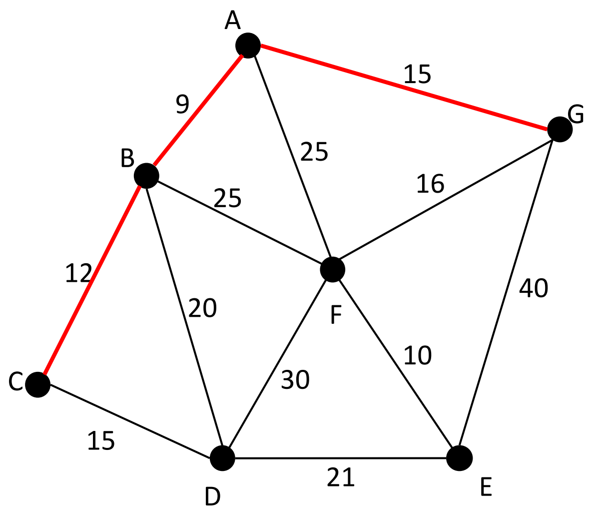


Figura 3.5.11 - Aplicação do algoritmo de Prim

De entre as arestas que ainda não foram selecionadas a aresta $\{C,D\}$ é a que tem menor peso e liga um vértice já na árvore a outro vértice que ainda está isolado.

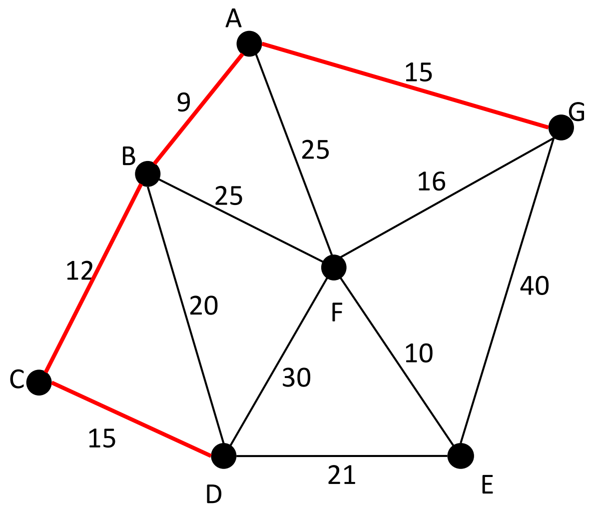


Figura 3.5.12 - Aplicação do algoritmo de Prim

A próxima aresta a ser adicionada para a árvore é $\{F,G\}$, que se encontra nas condições do algoritmo para poder ser a próxima selecionada.

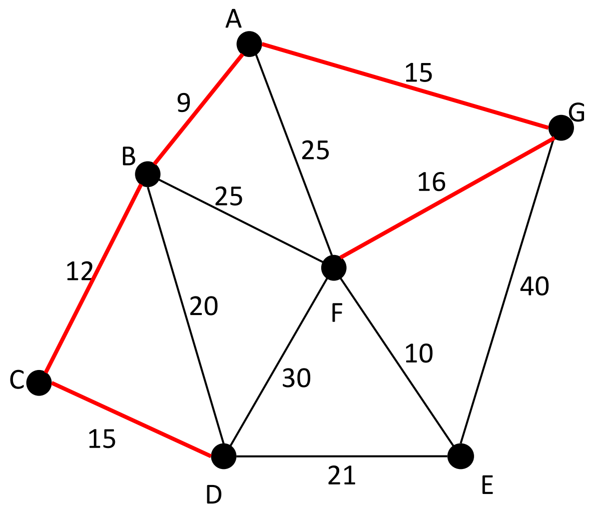


Figura 3.5.13 - Aplicação do algoritmo de Prim

Estão todos os vértices na árvore à exceção do vértice E. Das arestas que o ligam à árvore a que tem menos peso é a aresta $\{E,F\}$.

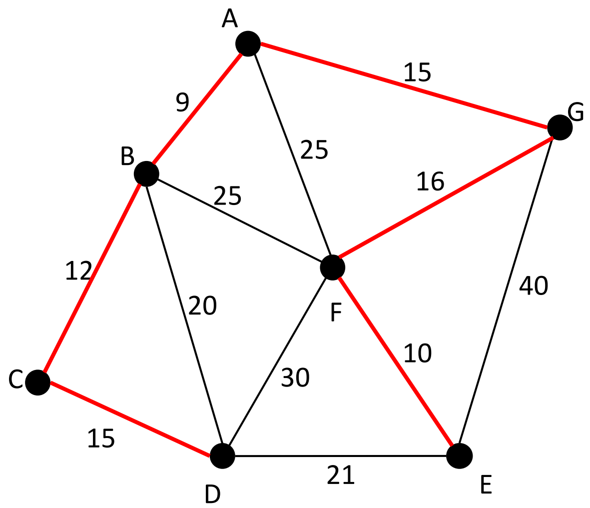


Figura 3.5.14 - Aplicação do algoritmo de Prim

A árvore abrangente mínima da figura que se segue representa a rede de estradas a pavimentar de novo.

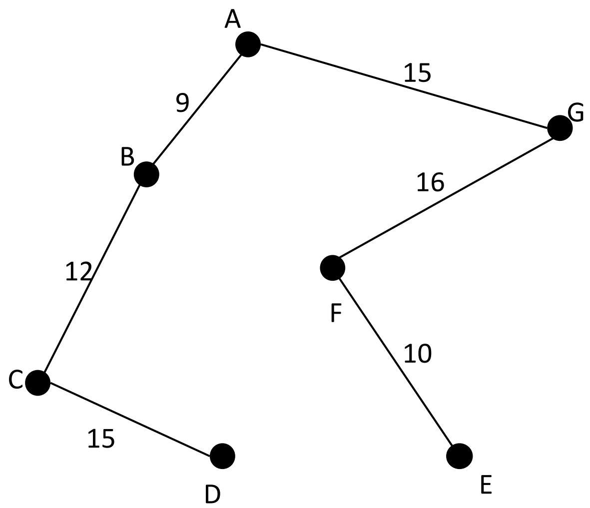


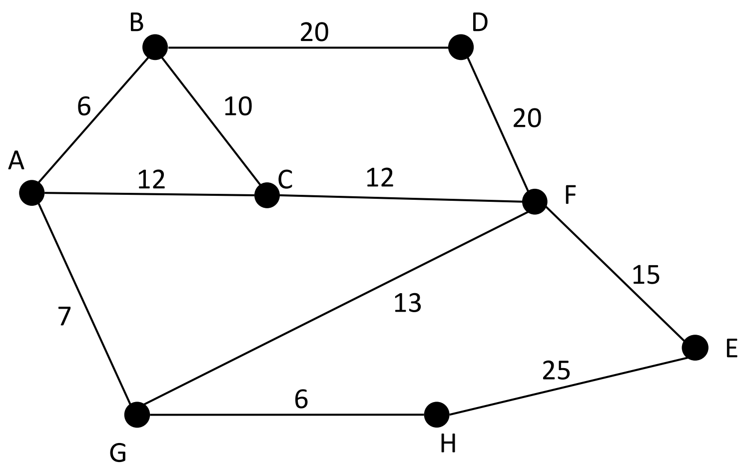
Figura 3.5.15 – Árvore abrangente mínima obtida pelo algoritmo de Prim

O número mínimo de quilómetros a pavimentar é 9+12+15+15+16+10=77.

Algoritmo de Kruskal

Este algoritmo consiste em selecionar, sucessivamente, as arestas do grafo por ordem crescente dos pesos, desde que não se formem ciclos e até que todos os vértices estejam na árvore.

Problema 3.5.2 *- Uma empresa de telecomunicações pretende instalar numa região uma nova rede telefónica. A figura seguinte mostra um mapa simplificado da região onde os vértices representam as localidades e as arestas representam as ligações onde é tecnicamente possível o lançamento de cabos. A cada aresta está associada a distância entre as localidades que liga.*



A empresa pretende efetuar uma ligação por cabos de modo que a partir de uma qualquer localidade se possa aceder a qualquer das outras minimizando o comprimento total do cabo utilizado. Quais as ligações a concretizar?

Resolução do *Problema 3.5.2*

Para aplicar o algoritmo de Kruskal, com vista a determinar a árvore abrangente de custo mínimo, é útil começar-se por ordenar as arestas por ordem crescente do seu peso.

Aresta	**Peso**
$\{A, B\}$	6
$\{G, H\}$	6
$\{A, G\}$	7

$\{B,C\}$	10
$\{A,C\}$	12
$\{C,F\}$	12
$\{F,G\}$	13
$\{E,F\}$	15
$\{B,D\}$	20
$\{D,F\}$	20
$\{E,H\}$	25

Tabela 3.5.1 – Ordenação dos pesos das arestas do grafo do problema 3.5.2

Da lista das arestas com os pesos já ordenados selecionam-se, uma a uma, as arestas com menor peso.

Note-se que, por vezes, ao aplicar o algoritmo de Kruskal existe a necessidade de selecionar entre arestas de peso igual, sendo a ordem pela qual são usadas aleatória, podendo-se finalizar com árvores abrangentes diferentes, mas sendo sempre mínimas.

Assim, selecionam-se para a árvore as arestas $\{A,B\}$, $\{G,H\}$, $\{A,G\}$e $\{B,C\}$.

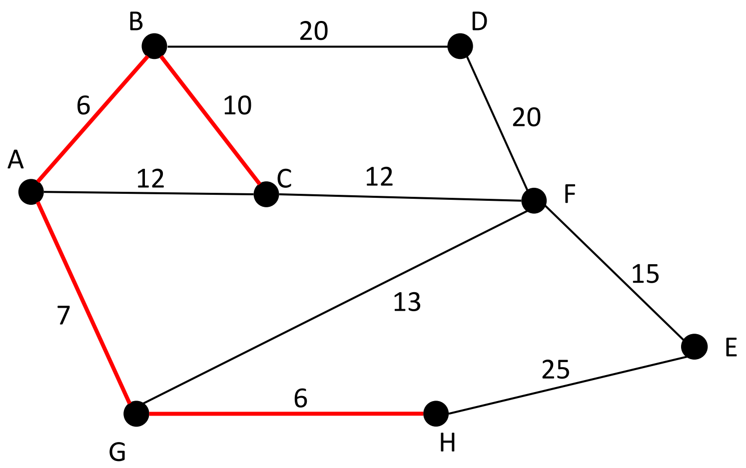


Figura 3.5.16 - Aplicação do algoritmo de Kruskal

As arestas $\{A,C\}$e $\{C,F\}$ têm as duas o mesmo peso. A aresta $\{A,C\}$ que não pode ser selecionada porque se formaria um ciclo é rejeitada e a aresta $\{C,F\}$ é a próxima selecionada para a árvore.

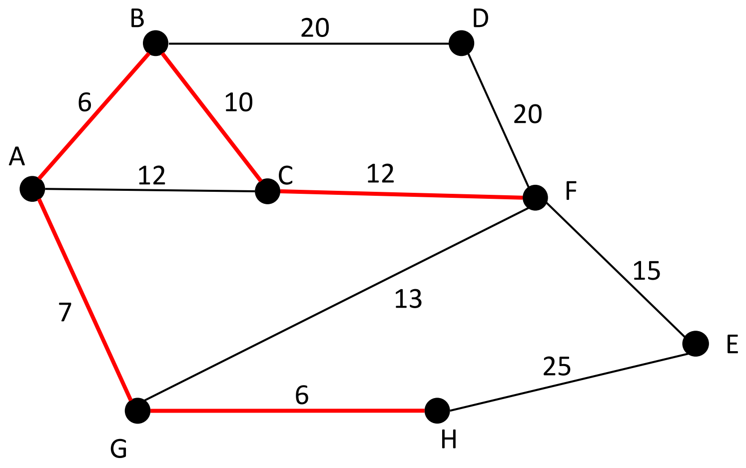


Figura 3.5.17 - Aplicação do algoritmo de Kruskal

A aresta $\{F,G\}$ que não pode ser selecionada porque forma um ciclo.

A próxima aresta a ser selecionada é a aresta $\{E,F\}$.

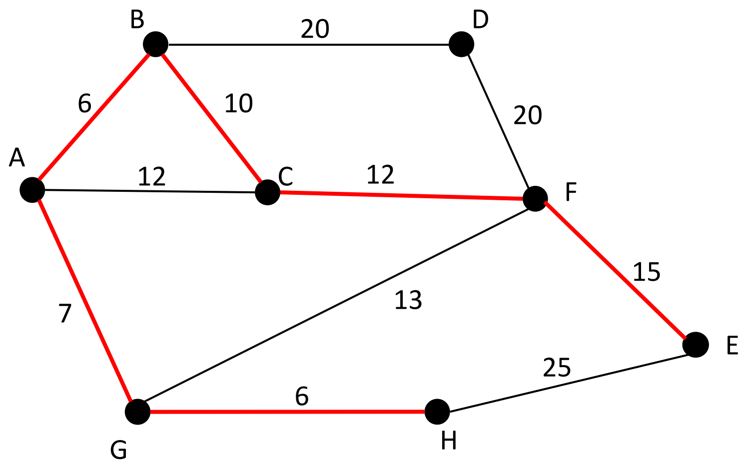


Figura 3.5.18 - Aplicação do algoritmo de Kruskal

De entre as arestas $\{B,D\}$ e $\{D,F\}$, com o mesmo peso, a primeira a ser selecionada pode ser, por exemplo, $\{B,D\}$.

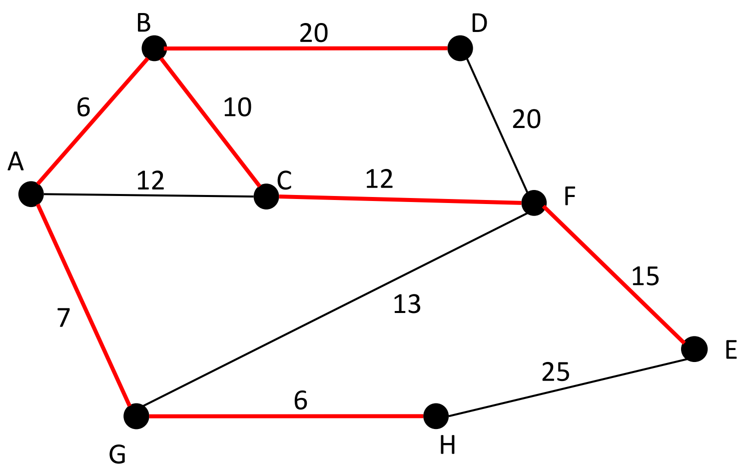


Figura 3.5.19 - Aplicação do algoritmo de Kruskal

Finalmente, como já se têm todos os vértices em conexão, rejeitam-se todas as arestas restantes.

A árvore abrangente mínima que se pretendia tem a forma da figura que se segue e um comprimento mínimo de 6+6+7+10+12+15+20=76.

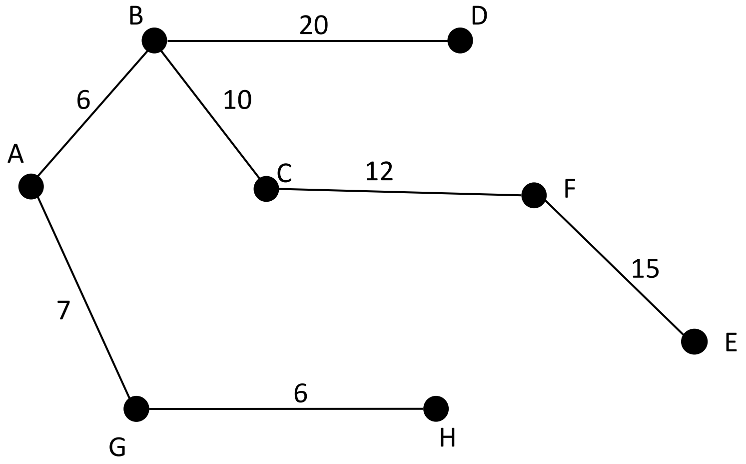


Figura 3.5.20 – Árvore abrangente mínima obtida pelo algoritmo de Kruskal

Note-se que se a escolha fosse $\{D,F\}$ em vez de $\{B,D\}$, esta aresta seria rejeitada. Neste caso a árvore abrangente mínima obtida seria outra mas com o mesmo peso total.

3.6 Grafos Orientados

Existe uma ampla variedade de aplicações práticas da Teoria dos Grafos.

Esta secção é dedicada à exploração de duas delas, que envolvem a noção de **Grafo Orientado**, o Problema do Caminho Mais Curto o Planeamento de projetos.

Definição 3.6.1: Um **grafo orientado** G é um par $(V;A)$ onde V é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices ou nodos e A é uma família finita de pares ordenados de elementos de V, não necessariamente distintos, chamados arcos, que ligam os vértices de V.

Da definição anterior resulta que:

- Para cada arco $a=(i,j)\in A$, i designa o vértice inicial e j o vértice final de a
- Os arcos de um grafo orientado são um par ordenado. Assim, dados dois vértices distintos *i* e *j*, os arcos (*i*,*j*) e (*j*,*i*) são distintos
- O arco $(i,i)\in A$ diz-se um lacete

Exemplo:

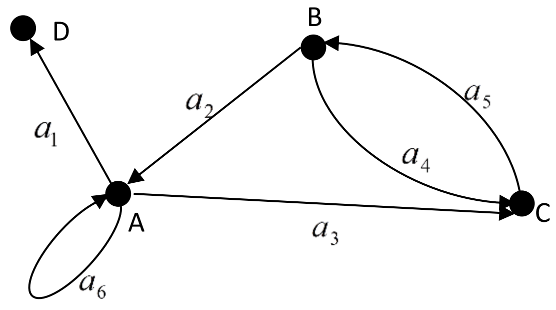


Figura 3.6.1 – Grafo orientado

No grafo representado na figura 3.6.1 tem-se

O conjunto dos vértices é $V=\{A,B,C,D\}$

O conjunto dos arcos é

$$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}=\{(A,D),(B,A),(A,C),(B,C),(C,B),(A,A)\}$$

O arco a_5 é um lacete.

Problema do Caminho Mais Curto- Algoritmo de Dijkstra

O problema do caminho mais curto é um dos problemas básicos da otimização em redes.

Esta classe de problemas ocorre frequentemente numa grande variedade de situações práticas nas quais se deseja realizar algum tipo de transporte entre dois pontos, com o objetivo de minimizar distâncias, tempo gasto no percurso, custos de ligação, etc.

Um algoritmo muito eficiente para determinar o caminho mais curto entre dois vértices num grafo ponderado com pesos não negativos (os pesos representam distâncias, tempos, custos, etc.), foi concebido, em 1959, pelo matemático holandês Dijkstra.

Em geral o algoritmo de Dijkstra é um processo de etiquetagem dos vértices do grafo. As etiquetas representam limites superiores no comprimento do caminho mais curto de um vértice ***v*** a cada vértice.

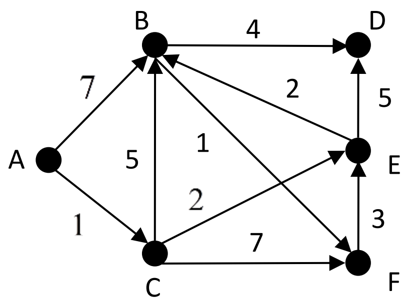
Estas etiquetas são continuamente reduzidas por um processo iterativo e em cada iteração exatamente uma das etiquetas torna-se definitiva representando então o comprimento do caminho mais curto entre v e esse vértice.

O algoritmo de Dijkstra pode ser estendido para a determinação dos caminhos mais curtos de ***v*** para todos os restantes vértices.

O exemplo que se segue ilustra a aplicação deste algoritmo.

Problema 3.6.1 *- O grafo da figura representa uma parte do sistema rodoviário de uma cidade. O custo associado a cada arco representa o tempo médio, em minutos, para percorrer esse arco.*

Qual o caminho mais rápido entre o vértice A e o vértice F?



Resolução do *Problema 3.6.1*

Na resolução desta atividade e para facilitar uma melhor compreensão da aplicação do Algoritmo de Dijkstra são preenchidas tabelas, com a informação relevante, a cada passo.

Começa-se por marcar inicialmente o vértice de partida (A) com a marca permanente 0^* (uma vez que o tempo necessário para ir do vértice A a ele próprio é 0) e marcar os restantes com a marca temporária $+\infty$ (uma vez que esses vértices ainda não foram atingidos).

Nota: O sinal *, distingue uma etiqueta como permanente.

Vértices	A	B	C	D	E	F
Tempo	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Tabela 3.6.1 – Aplicação do algoritmo de Dijkstra

A partir de A podem ser atingidos os vértices B e C. Para ir de A até B são necessários 7 minutos e para ir de A até C é necessário 1 minuto.

Pode agora fazer-se a atualização das etiquetas.

Vértices	A	B	C	D	E	F
Tempo	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		7	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Tabela 3.6.2 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra

De todos os vértices com etiqueta temporária escolhe-se o vértice cuja etiqueta é a menor, que representa o menor tempo acumulado até esse vértice. Marca-se essa etiqueta como permanente uma vez que o tempo necessário para ir de A até esse vértice não poderá diminuir.

Vértices	A	B	C	D	E	F
Tempo	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		7	1^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Tabela 3.6.3 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra

Neste momento tem-se o tempo mínimo necessário para ir de A a C (1 minuto).

As etiquetas temporárias podem agora ser atualizadas. Para isso partindo do vértice C (último vértice com etiqueta permanente) pode ir-se até B, E e F.

Para cada caso analise-se o tempo acumulado de A até esse vértice, passando por C:

Até B: 1(até C)+5(até B)=6 . Este valor é melhor que o atual (7), mudando-se na tabela o tempo de A a B de 7 para 6.

Até E: 1(até C)+2(até E)=3. Este valor é melhor que $+\infty$. A etiqueta passa para 3.

Até F: 1(até C)+7(até F)=8. Este valor é melhor que $+\infty$. A etiqueta passa para 8.

Vértices	A	B	C	D	E	F
Tempo	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		7	1^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		6		$+\infty$	3	8

Tabela 3.6.4 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra

A etiqueta com valor 3 é a que passa a permanente pois é a que tem o menor valor.

Vértices	A	B	C	D	E	F
Tempo	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		7	1^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		6		$+\infty$	3^*	8

Tabela 3.6.5 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra

O tempo mínimo necessário para ir de A até E é 3 minutos (A-C-E).

Partindo agora do último vértice com etiqueta permanente (E) pode-se chegar até B ou D.

As distâncias acumuladas são agora:

Até B: 1(até C)+2(até E)+2(até B)=5. Como este valor é mais pequeno que o atual muda-se a etiqueta para 5.

Até D: 1(até C)+2(até E)+5(até D) , Este valor é melhor que $+\infty$, passando a etiqueta para 8.

Vértices	A	B	C	D	E	F
Tempo	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		7	1^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		6		$+\infty$	3^*	8
		5		8		8

Tabela 3.6.6 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra

A etiqueta com menor valor passa a permanente. Pode concluir-se que o tempo mínimo necessário para ir de A até B é 5 minutos (A-C-E-B).

Vértices	A	B	C	D	E	F
Tempo	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		7	1^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		6		$+\infty$	3^*	8
		5^*		8		8

Tabela 3.6.7 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra

Partindo agora de B pode-se chegar até F ou até D.

Até F: 1(até C)+2(até E)+2(até B)+1(até F)=6. Este valor é mais pequeno que 8 pelo que se pode mudar a etiqueta.

Até D: 1(até C)+2(até E)+2(até B)+4(até D)=9. Este valor é maior que o anterior. A etiqueta com o valor 8 mantém-se.

Vértices	A	B	C	D	E	F
Tempo	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		7	1^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		6		$+\infty$	3^*	8
		5^*		8		8
				8		6

Tabela 3.6.8 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra

A etiqueta que passa a permanente é a que tem o valor 6.

Vértices	A	B	C	D	E	F
Tempo	0^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		7	1^*	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		6		$+\infty$	3^*	8
		5^*		8		8
				8		6^*

Tabela 3.6.9 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra

O tempo mínimo necessário para ir de A até F é 6 minutos.

O caminho mais rápido percorre sucessivamente os vértices A-C-E-B-F.

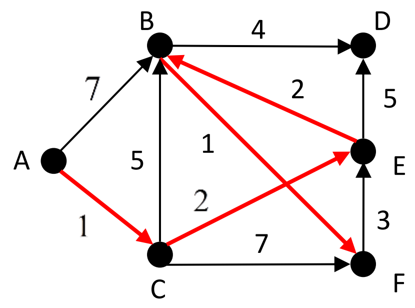


Figura 3.6.2 – Caminho mais rápido obtido pelo algoritmo de Dijsktra

Planeamento de Projetos

Em muitas situações práticas estão envolvidos o estabelecimento de horários e o encadeamento de atividades no planeamento de um projeto.

Este tipo de problemas em que existe um conjunto atividades a serem desenvolvidas nos respetivos tempos necessários para a realização de cada uma, e as restrições de precedências entre elas, podem ser representados por grafos orientados, designados por **redes de atividades**.

Note-se que existe uma relação de precedência entre atividades quando o início da realização de uma depende da conclusão de outra ou outras actividades.

Um método para o tratamento deste tipo de problemas é o denominado **Método CPM** (Critical Path Method - Método do Caminho Crítico) que consiste, essencialmente, em determinar a menor duração possível de um projeto, e a sequência de atividades, desde o instante inicial até ao instante final, que não pode sofrer atrasos para garantir que o projeto fica concluído o mais cedo possível. Esta sequência é chamada de caminho crítico. O caminho crítico é, portanto, o caminho mais longo entre o instante inicial e o instante final de um projeto.

O método do caminho crítico tem sido usado em muitas situações reais que envolvem o planeamento de projetos e permite:

- Planear o projeto antecipadamente e prever quais as atividades suscetíveis de atrasar a conclusão do projeto;
- Controlar a realização das várias atividades de acordo com a sequência pré-estabelecida de modo a garantir a conclusão do projeto o mais cedo possível, isto é, em caso de atrasos, prever se estes podem ou não implicar um atraso na conclusão do projeto e, em caso afirmativo, de quanto tempo.

O problema que se segue ilustra a construção de uma rede de atividades e descreve a aplicação do método CPM.

__Problema 3.6.2__ - Um dos trabalhos realizados diariamente nos aeroportos e que exige grande coordenação das equipas, responsáveis por tarefas diferentes, consiste no acompanhamento de um qualquer avião desde que aterra na pista até ficar pronto para descolar.

A tabela seguinte resume a informação relativa a este tipo de trabalho, nomeadamente as atividades envolvidas e os respetivos tempos necessários à sua realização, bem como a dependência de cada uma delas relativamente às outras:

Atividade	***Duração (minutos)***	***Precedências***
A-descarregar bagagens	*8*	*Nenhuma*
B-carregar bagagens	*15*	*A*
C-desembarcar passageiros	*14*	*Nenhuma*
D-embarcar passageiros	*25*	*E e G*
E-limpar cabine	*13*	*C*
F-reabastecer catering	*5*	*E*
G-reabastecer combustível	*16*	*C*

Tendo em conta os dados da tabela responda às seguintes questões:

1. *Qual o tempo mínimo necessário desta operação?*
2. *Quais as atividades que não podem sofrer atrasos para que esta operação seja executada no menor tempo possível?*

MACS-Matemática Aplicada às Ciências Sociais-11.º ano, Areal Editores (adaptado)

Resolução do *Problema 3.6.2*

O passo inicial na resolução deste problema consiste em construir uma **rede de atividades,** isto é, um grafo orientado onde os arcos representam atividades aos quais está associado um peso que corresponde à sua duração e os vértices representam momentos específicos do tempo que se identificam com o início ou fim de uma ou mais atividades.

Na construção de uma rede de atividades deve ainda ter-se em conta que:

– Cada atividade do projeto é representada por um único arco;
– A orientação dos arcos é utilizada para representar a sequência das atividades a realizar: se uma atividade precede outra, a segunda só pode ser realizada depois da primeira estar terminada;
– Sempre que necessário utilizam-se atividades fictícias - com duração nula - de forma a evitar ambiguidades na rede;
– Os vértices são numerados de forma que o vértice inicial de um arco tenha sempre um número inferior ao vértice final.

Retomando o problema proposto, inicie-se a construção da rede de atividades.

1. As atividades que não têm precedentes podem iniciar o projeto. Os arcos correspondentes podem ter início no mesmo vértice, que representará o início do projeto. As atividades A e C são as únicas que não têm precedentes.

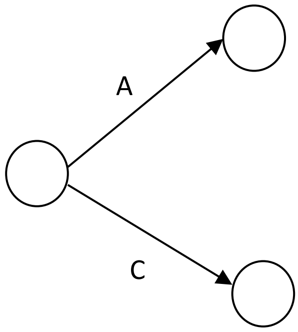


Figura 3.6.3 – Construção da rede de atividades

2. Na tabela do enunciado pode ler-se que A precede B.

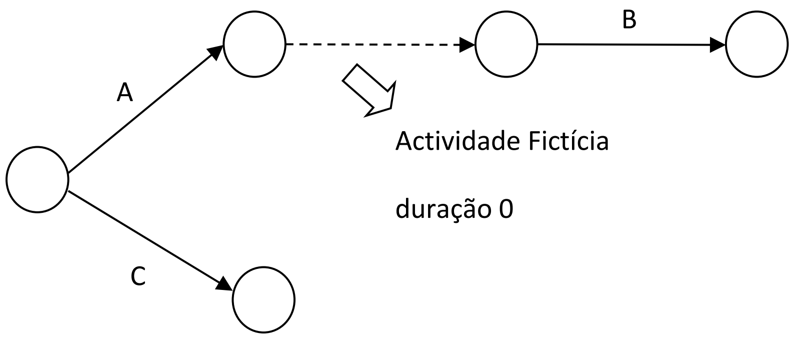


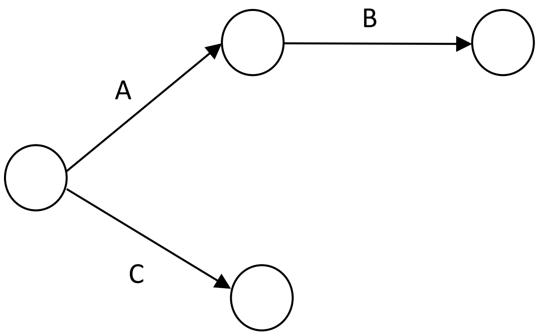
Figura 3.6.4 - Construção da rede de atividades

Note-se que:

– Se uma atividade fictícia é a única a convergir num vértice, pode ser eliminada e juntam-se os vértices correspondentes;

– Se uma atividade fictícia é a única a divergir de um vértice, pode ser eliminada e juntam-se os vértices correspondentes.

Nesta situação a atividade fictícia pode ser suprimida e a rede simplificada.



3. Da mesma forma, a atividade C precede E e G.

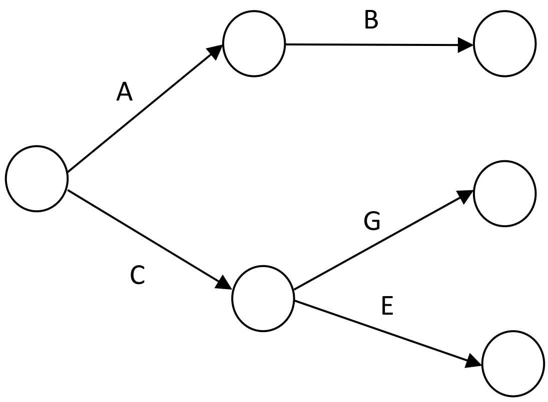


Figura 3.6.6- Construção da rede de atividades

4. A atividade E precede F.

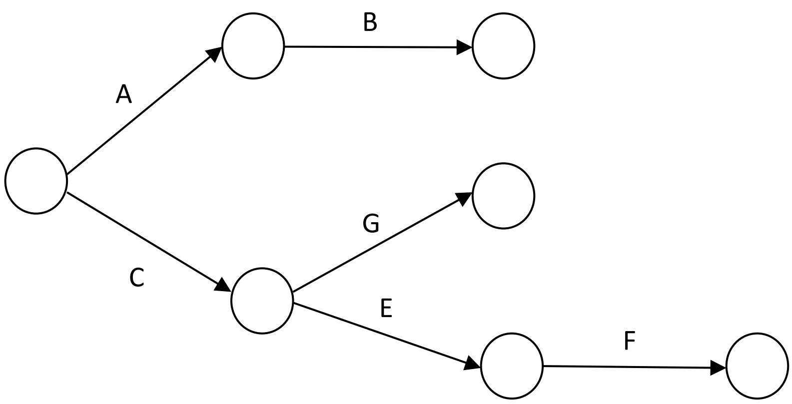


Figura 3.6.7 - Construção da rede de actividades

5. As atividades E e G precedem D. Para representar o arco correspondente à atividade D é necessária a construção de uma atividade fictícia.

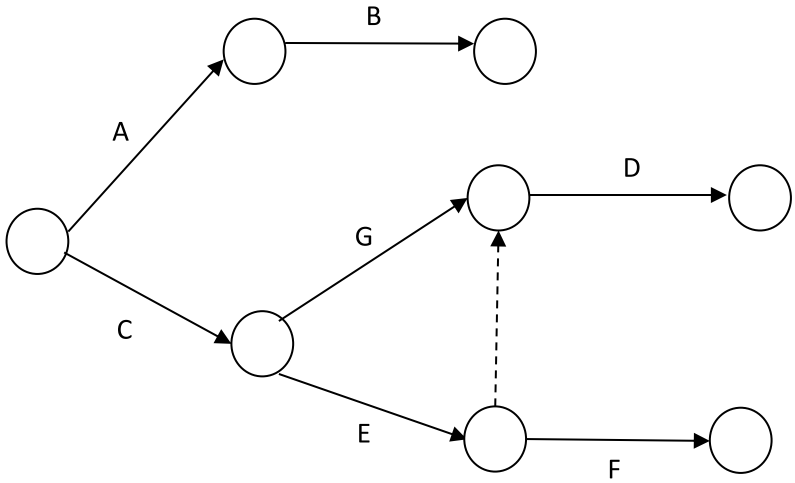


Figura 3.6.8 - Construção da rede de atividades

6. As atividades que não precedem qualquer outra podem terminar o projeto. Os arcos correspondentes podem convergir no mesmo vértice, o qual representará o instante da conclusão do projecto.

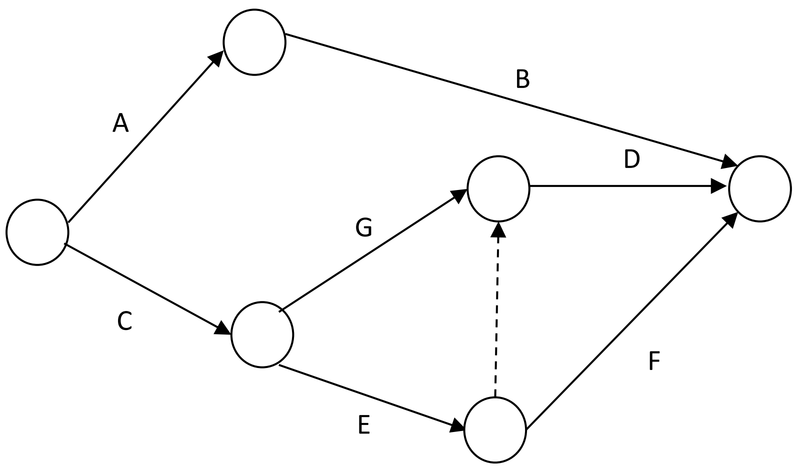


Figura 3.6.9 - Construção da rede de atividades

7. Na numeração dos vértices deve ter-se em conta que:
   - Ao vértice inicial de um arco atribui-se um número inferior ao do vértice final;

– Só se pode atribuir um número a um vértice se todos os seus antecessores já tiverem sido numerados.

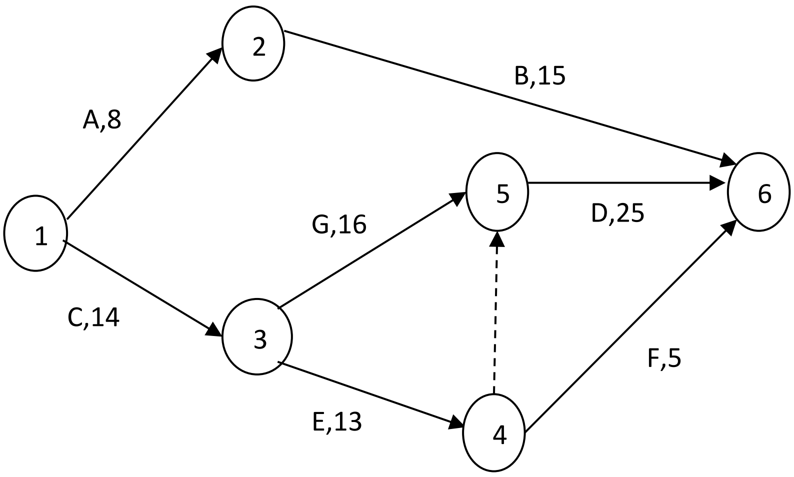


Figura 3.6.10 - Rede de actividades do *Problema 3.6.2*

Após a construção da rede de atividades, pretende-se agora responder às questões:

1. ***Qual o tempo mínimo necessário desta operação?***
2. ***Quais as atividades que não podem sofrer atrasos para que esta operação seja executada no menor tempo possível?***

Para o efeito descreve-se em seguida a aplicação do método CPM.

***Definição* 3.6.1**: Num problema de planeamento de projetos designa-se por **acontecimento** o momento que marca a conclusão de uma ou mais atividades ou, então, o início do projeto.

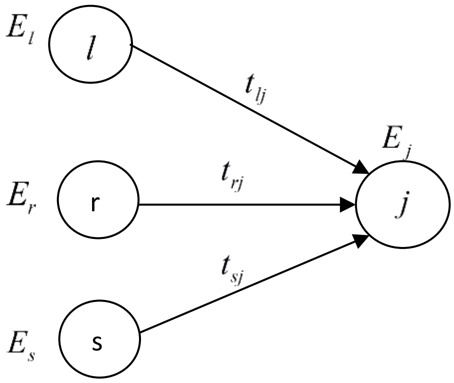
Note-se que quando se representa um projeto através de uma rede de atividades nos arcos, os acontecimentos estão associados aos vértices.

A primeira etapa do método CPM consiste em determinar, para cada vértice, a **data mais cedo** em que é possível ocorrer o acontecimento associado a esse vértice e corresponde ao menor tempo possível que permite a conclusão de todas as atividades que nele convergem.

Definição 3.6.2: Seja $G=(X,A)$ uma rede de atividades. O instante mais cedo em que é possível ocorrer o acontecimento a que corresponde o vértice $j \in X$ designa-se por **data mais cedo** do vértice j e representa-se por E_j .

Considere-se t_{ij} a duração da atividade (i, j), com $(i, j) \in A$

A data mais cedo determina-se, para cada vértice, tendo em conta que o acontecimento que lhe corresponde só se realiza quando todas as atividades que nele convergem estiverem terminadas, isto é,

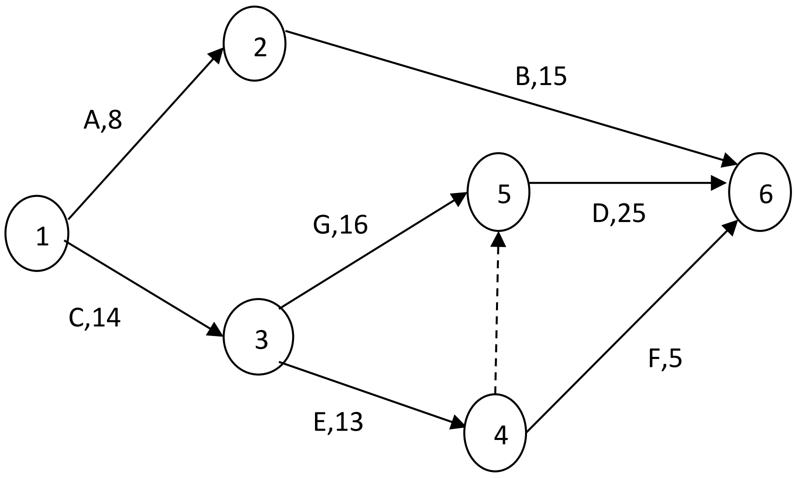


$$E_j = \max\{E_l + t_{lj}, E_r + t_{rj}, E_s + t_{sj}\}$$

Portanto

$$E_j = \max_{(i,j)\in A}\{E_i + t_{ij}\}$$

Recorde-se a rede de atividades correspondente ao problema proposto e calculem-se as datas mais cedo para cada vértice.



$E_1 = 0$ (A data mais cedo do início do projeto é 0)

$E_2 = \max\{E_1 + t_{12}\} = 8$

$E_3 = \max\{E_1 + t_{13}\} = 14$

$$E_4 = \max\{E_3 + t_{34}\} = 14 + 13 = 27$$

$$E_5 = \max\{E_3 + t_{35}, E_4 + t_{45}\} = \max\{30{,}27\} = 30$$

$$E_6 = \max\{E_2 + t_{26}, E_4 + t_{46}, E_5 + t_{56}\} = \max\{23{,}32{,}55\} = 55$$

A resposta à questão ***1. Qual o tempo mínimo necessário para esta operação?*** é 55 minutos, que corresponde à data mais cedo do vértice 6 (caminho mais longo entre o vértice 1 e o vértice 6).

É fácil de ver na figura 3.6.10 que se forem alteradas as durações de algumas atividades ou o seu início sofrer algum atraso, a conclusão do projeto é alterada. Por exemplo, se ocorrer um atraso de 2 minutos ao embarcar os passageiros (atividade D), a operação só pode ficar concluída ao fim de 57 minutos.

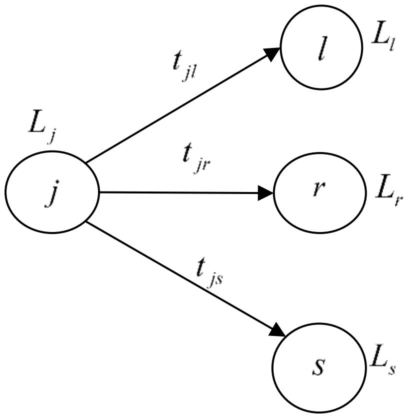
Por outro lado, também existem atividades que podem sofrer atrasos sem influenciar a conclusão do trabalho, como é o caso da atividade F cujo atraso pode ir até 23 minutos, admitindo que as actividades que lhe precedem são realizadas no tempo previsto.

Uma atividade que não pode sofrer atrasos para garantir a conclusão de um projeto o mais cedo possível designa-se por **Atividade Crítica**. A determinação dessas atividades é fundamental para a execução eficiente de um projeto.

Para esse fim há que proceder à determinação, para cada acontecimento/vértice, das **datas mais tarde**. A data mais tarde corresponde ao momento mais tardio da ocorrência de um acontecimento sem que haja atrasos na conclusão do projeto.

Definição 3.6.3: Seja $G = (X, A)$ uma rede de atividades. A data mais tarde em que é possível ocorrer o acontecimento a que corresponde o vértice $j \in X$ de forma a que todo o projeto fique concluído no prazo mínimo, designa-se por **data mais tarde** do vértice j e representa-se por L_j.

Cada acontecimento tem que ocorrer num prazo tal que os acontecimentos que lhe sucedem possam estar terminados nos respetivos prazos máximos, isto é,



$$L_j = \min\{L_l - t_{jl}, L_r - t_{jr}, L_s - t_{js}\}$$

Para cada vértice tem-se que

$$L_j = \min_{(j,i)\in A}\{L_i - t_{ji}\}$$

As datas mais tarde da rede de atividades do problema proposto podem agora ser calculadas:

Começa-se com $L_6 = 55$ (A data mais cedo do fim do projeto é 55)

$L_5 = \min\{L_6 - t_{56}\} = 30$

$L_4 = \min\{L_6 - t_{46}, L_5 - t_{45}\} = \min\{50,30\} = 30$

$L_3 = \min\{L_5 - t_{35}, L_4 - t_{34}\} = \min\{14,17\} = 14$

$L_2 = \min\{L_6 - t_{26}\} = 40$

$L_1 = \min\{L_2 - t_{12}, L_3 - t_{13}\} = \min\{32,0\} = 0$

A tabela 3.6.10 sintetiza os valores das datas mais cedo e datas mais tarde para cada vértice.

Vértice (i)	Data mais cedo (E_i)	Data mais tarde (L_i)
1	0	0
2	8	40
3	14	14
4	27	30
5	30	30
6	55	55

Tabela 3.6.10 – Datas mais cedo e datas mais tarde

Interessa agora determinar quais as atividades críticas, isto é, que não podem sofrer atrasos no decorrer deste processo.

Definição 3.6.4: Seja $G=(X,A)$ uma rede de atividades. Define-se **folga de uma atividade** $(i,j)\in A$ como o valor máximo que uma atividade se pode atrasar por forma a concluir o projeto no prazo mínimo.

A atividade (i,j) realiza-se entre o instante E_i (data mais cedo em que pode iniciar) e o instante L_j (Data mais tarde em que pode terminar).

Sendo t_{ij} a duração da atividade (i,j) a folga é dada por

$$L_j - E_i - t_{ij}$$

Definição 3.6.5: Seja $G=(X,A)$ uma rede de atividades. Uma **atividade crítica** é uma atividade com folga nula.

Atividade (i,j)	Duração (t_{ij})	Data mais cedo de início (E_i)	Data mais tarde de fim (L_j)	Folga da atividade $L_j - E_i - t_{ij}$
A$(1,2)$	8	0	40	32 (40-0-8)
B$(2,6)$	15	8	55	32 (55-8-15)
C$(1,3)$	14	0	14	0 (14-0-14)
D$(5,6)$	25	30	55	0 (55-30-25)
E$(3,4)$	13	14	30	3 (30-14-13)
F$(4,6)$	5	27	55	23 (55-27-5)
G$(3,5)$	16	14	30	0 (30-14-16)

Tabela 3.6.11 – Folga de uma atividade

Pela análise da tabela 3.6.11 pode concluir-se que as atividades A, B E e F têm folgas positivas, isto é, dispõem de um tempo maior do que o necessário para serem realizadas. As atividades C, D e G têm folga nula. São as atividades críticas, pois qualquer atraso numa delas provoca um atraso na conclusão do trabalho no menor tempo possível (55 minutos).

Definição 3.6.6: Um caminho formado apenas por atividades críticas, com origem no vértice que representa o início do projeto e fim no vértice que representa a conclusão do projeto diz-se um **caminho crítico**.

Qualquer caminho mais longo entre os vértices que correspondem ao início e fim do projeto é um caminho crítico e o seu comprimento é a data mais cedo da conclusão do projeto.

No problema apresentado o caminho crítico é $\{(1,3),(3,5),(5,6)\}$

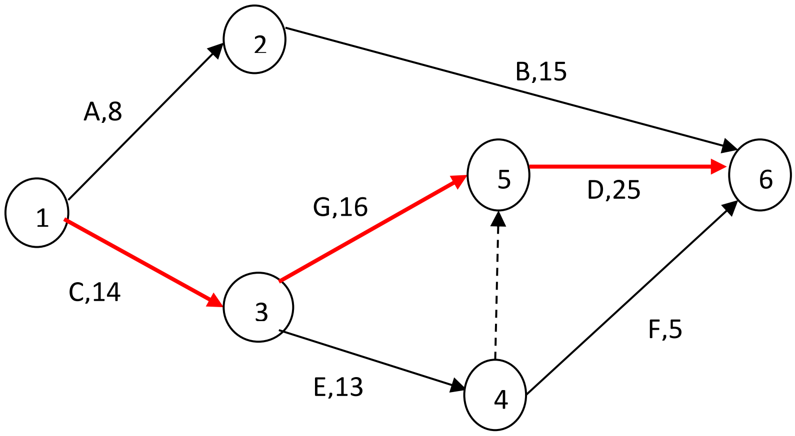


Figura 3.6.11 – Caminho crítico

3.7 Problemas propostos

Problema proposto 1

Um arquiteto organizou o recinto destinado à realização de uma conferência internacional de arte (Figura 3.7.1). O recinto tem os seguintes espaços: auditório, cantina, espaço de debate, exposição, pátio e teatro. Todos os espaços têm, pelo menos, uma porta.

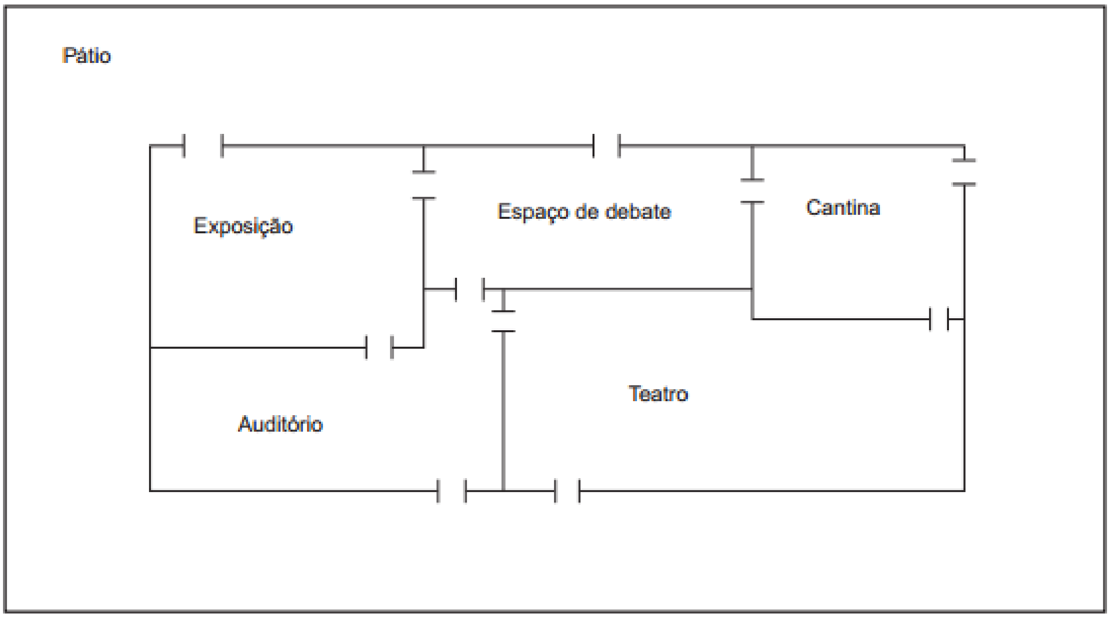


Figura 3.7.1 – Esquema representativo do Problema proposto 1

Ao analisar o esquema desenhado pelo arquiteto (Figura 3.7.1), uma funcionária comentou que, caso se mantivesse o número de portas, não conseguiria efetuar uma ronda ao recinto começando e terminando essa ronda na cantina, percorrendo todas as portas e passando por cada porta uma única vez.

A funcionária pretendeu, então, encontrar uma solução que lhe permitisse efetuar essa ronda percorrendo todas as portas e passando o menor número de vezes possível por cada porta.

Determine, justificando, uma solução que permita satisfazer a pretensão da funcionária.

Na sua resposta, deve:

- apresentar um grafo que modele a situação descrita;
- apresentar o significado dos elementos, arestas e vértices, que constituem o grafo;
- apresentar, justificando, uma solução.

Exame de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, 1.ª fase, 2013

Problema proposto 2

O Luís é um aluno finalista do Ensino Secundário e nas suas férias pretende visitar quatro cidades: Braga, Porto, Lamego e Viseu.

A viagem inicia-se e termina em Amarante, não importando a ordem pela qual as cidades são visitadas, pois a partir de cada uma delas é possível ir diretamente a qualquer uma das outras.

Na Tabela 3.7.1, estão indicadas as distâncias, em quilómetros, entre as cidades referidas.

	Braga	Porto	Lamego	Viseu
Amarante	74	61	71	107
Braga	—	70	117	130
Porto	—	—	106	75
Lamego	—	—	—	62

Tabela 3.7.1 – Dados do Problema proposto 2

Para determinar um percurso com início e fim em Amarante e no qual nenhuma cidade seja repetida o Luís pretende recorrer aos conhecimentos que adquiriu na frequência da disciplina de MACS. Para isso tem duas opções:

Opção 1: Aplicar o algoritmo do vizinho mais próximo.

Opção 2: Aplicar o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas.

O Luís considera que a opção 1 dá um percurso cujo número total de quilómetros é inferior ao dado pela opção 2.

Verifique se o Luís tem, ou não, razão.

Na sua resposta, deve:

- apresentar um grafo ponderado que represente a situação;
- aplicar cada uma das opções;
- indicar o número total de quilómetros percorridos em cada uma das duas opções;
- apresentar uma conclusão.

Exame de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, Época Especial, 2013 (adaptado)

Problema Proposto 3

Numa cidade há cinco quarteirões com problemas de roubo e violência. A polícia decidiu instalar um sistema de computadores em rede para facilitar a comunicação entre os respetivos quartéis. A disposição geográfica dos quarteirões e a distância entre cada um deles (quando a ligação é possível) estão dadas na figura seguinte:

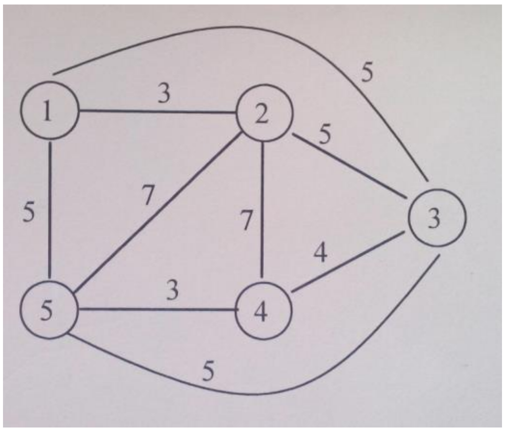


Figura 3.7.2 – Grafo representativo do Problema proposto 3

Pretende-se efetuar uma ligação com cabos subterrâneos de modo que a partir de um qualquer bairro se possa aceder a qualquer dos outros minimizando o comprimento total do cabo. Resolva este problema recorrendo a um algoritmo adequado.

Elementos de apoio às aulas de Probabilidades e Estatística,Parte 2- Investigação Operacional

Problema proposto 4

Considere o grafo da figura seguinte que representa uma parte do sistema rodoviário de uma cidade. Os 7 vértices representam a estação dos correios (C), a escola (E), o ginásio (G), o tribunal (T), o hospital (H) e a igreja (I). Os pesos associados aos arcos representam a duração média em minutos do percurso entre dois pontos (quando este é possível fazer de automóvel). O Manuel é taxista e num determinado dia pretende levar um cliente da estação dos correios (C) até ao ginásio (G). De que forma o pode fazer de modo a chegar ao destino o mais rápido possível. Identifique o caminho e indique a duração do mesmo.

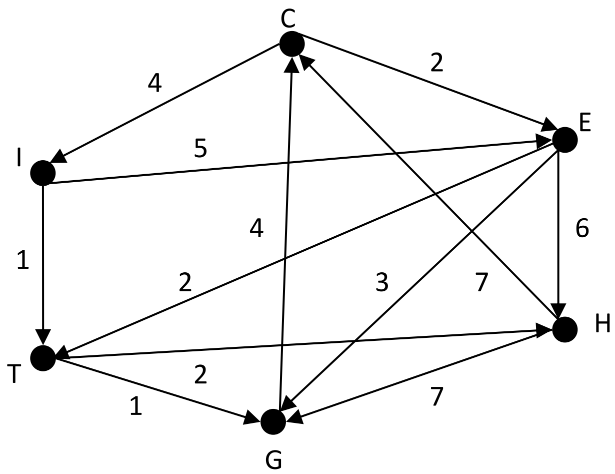


Figura 3.7.3 – Grafo representativo do Problema proposto 4

Problema proposto 5

Um pequeno projecto consiste na remodelação de uma cozinha. O responsável do projeto necessita que tudo corra dentro do previsto e para isso quer planear convenientemente todo o processo.

Assim, identificou as seguintes atividades e as respetivas durações (em dias):

A: Mudança da canalização da água (3 dias)

B: Mudança da canalização do gás (2 dias)

C: Montagem de um novo pavimento (1 dia)

D: Rebocar e pintar a parede (4 dias)

E: Reforçar a instalação elétrica (1 dia)

F: Colocação da iluminação (1 dia)

G: Instalação de equipamento (3 dias)

Naturalmente, estas actividades devem ser realizadas por uma determinada ordem, uma vez que o início de algumas delas depende da conclusão de outras. De fato,

A deve preceder **C** e **D**

B deve preceder **D**

C deve preceder **G**

D deve preceder **F** e **G**

E deve preceder **F**

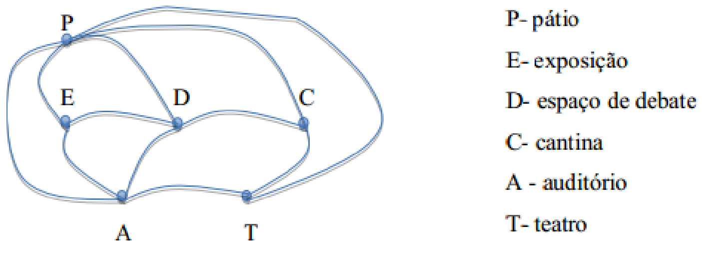
Utilizando uma rede de atividades determina o tempo mínimo para a conclusão do projeto e as atividades que não podem sofrer atrasos para não atrasar a conclusão do mesmo.

Elementos de apoio às aulas de Probabilidades e Estatística,Parte 2- Investigação Operacional (adaptado)

3.8 Soluções dos problemas propostos

Problema proposto 1

Um possível grafo que modela a situação é o seguinte, onde os vértices representam cada um dos espaços do recinto e as arestas, o percurso que vai de um espaço a outro passando por uma porta.

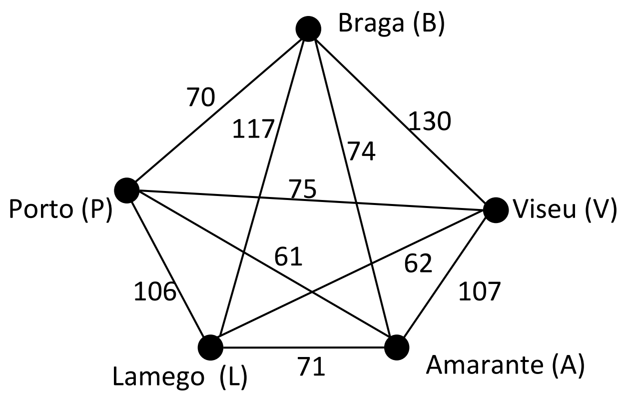


Para ser possível fazer uma ronda ao recinto, cumprindo as condições impostas terá que existir um ciclo de Euler, no entanto tal não acontece porque existem no grafo vértices de grau ímpar.

Assim, a solução passa pela duplicação das arestas PE e TC.

Problema proposto 2

Um possível grafo que modela esta situação é o seguinte:



Se a viagem for percorrida pelo percurso fornecido pela opção 1 (APBLVA) o número total de quilómetros percorridos é 417.

Se a viagem for percorrida pelo percurso fornecido pela opção 2 (APBVLA) o número total de quilómetros percorridos é 397.

O Luís não tem razão.

Problema Proposto 3

O comprimento mínimo total de cabo a utilizar é de 15 unidades de comprimento. Para esse efeito, podem ser feitas as seguintes ligações: {1,2}, {1,5}, {5,4} e {3,4}.

Problema proposto 4

O caminho mais rápido tem a duração de 5 minutos e o percurso correspondente é: Estação dos correios – Escola – Tribunal – Ginásio.

Problema proposto 5

O tempo mínimo de duração do projeto são 10 dias. As actividades que não podem sofrer atrasos para não comprometer a conclusão do projeto são A, D e G.

Bibliografia

Aldous, J. M., & Wilson, R. J. (s.d.). *Graphs and Applications - An Introductory Approach* . Springer.

Andrade, C., Viegas, C., Pereira, P. P., & Pimenta, P. (2011). *ípsilon - MATEMÁTICA A - 11.ºANO* (1ª ed., Vol. I). Lisboa: Texto Editores, Lda.

Associação Portuguesa de Investigação Operacional. (s.d.). *Apdio*. Obtido em Agosto de 2014, de Associação Portuguesa de Investigação Operacional: http://apdio.pt/home

Biggs, N. L. (s.d.). *Discrete Mathematics.* Oxford University Press.

Bolhobás, B. (1979). *Graph Theory - An Introductory Course.* Springer.

Captivo, M. E. (2012). Elementos de apoio às aulas de Probabilidades e Estatística, Parte 2- Investigação Operacional, FCUL.

Cardoso, D. M., Szymanski, J., & Rostami, M. (2009). *Matemática Discreta. Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos.* Lisboa: Escolar Editora.

Christofides, N. (1975). *Graph Theory - an Algorithmic Approach.* Academic Press Inc.

Correia, M. C. (s.d.). *Preparar o exame nacional - MACS 10/11.* Porto: Areal Editores.

Costa, B., & Rodrigues, E. (s.d.). *Novo Espaço 11* (Vol. I). Porto: Porto Editora.

Costa, R. A. (2005). Elementos de apoio às aulas de Investigação Operacional B, FCTUNL.

Cruchinho, C., & Simões, M. (s.d.). *MACS 11/12.* Porto: Areal Editores.

Esquível, I. M. (1998). elementos de apoio às aulas de Grafos e Aplicações, FCTUNL.

Hillier, F., & Lieberman, G. (2005). *Introduction to Operations Research* (8ª ed.). McGraw-Hill.

Jorge, A. M., Alves, C. B., Fonseca, G., & Barbedo, J. (s.d.). *Infinito 11A* (Vol. I). Porto: Areal Editores.

Longo, E., & Branco, I. (2011). *MACS-Matemática Aplicada às Ciências Sociais-11.º ano* (1.ª ed.). Lisboa: Texto Editores Lda.

Ministério da Educação. (1998). *Geometria 11.º ano de escolaridade.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação. (2001). *Matemática A - Programa do 10.º ano.* Lisboa.

Ministério da Educação. (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.* Lisboa: Autor.

Ministério da Educação. (2002). *Matemática A - Programa do 11.º Ano.* Lisboa: Autor.

Ministério da Educação. (2002). *Matemática B - Programa do 12.º Ano.* Lisboa: Autor.

Neves, M. A., Bolinhas, S., & Faria, L. (s.d.). *MACS 11 - Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11.º Ano* (Vol. I). Porto: Porto Editora.

Oliveira, J. F. (Maio de 1998). *Utilização do Solver do Excel.* Obtido em Janeiro de 2013, de http://paginas.fe.up.pt/~jfo/ensino/io/docs/IOP_utilsolver.pdf

Ramalhete, M., Guerreiro, J., & Magalhães, A. (1984). *Programação Linear* (Vol. I). Lisboa: McGraw-Hill.

Resolução de problemas de programação linear - usando o comando Solver, no Excel. (s.d.). Obtido de NetProf: http://www.netprof.pt/matematica/pdf/Linear_Solver.pdf

Viegas, C., Gomes, F., & Lima, Y. (2011). *XEQMAT11 - Matemática A - 11.º ano* (1ª ed., Vol. I). Lisboa: Texto Editores, Lda.

Wilson, R. J. (1985). *Introduction to Graph Theory* (3ª ed.). England: Longman Group Limited.